СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 33, № 2 МАРТ — АПРЕЛЬ 1992

УДК 517.535.4

М. Н. ШЕРЕМЕТА, А. Д. КУЗЫК

О ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И НУЛЯХ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО l-ИНДЕКСА

Пусть l — положительная непрерывная на $[0, +\infty)$ функция, а f — целая функция. Обозначим $a_n(z;\ f) = |f^{(n)}(z)|/n!$ и $\varphi_n(z;\ f,\ l) = a_n(z;\ f)l^{-n}(|z|)$. Функция f называется [1] *целой функцией ограниченного l-индекса*, если существует $N \in \mathbf{Z}_+$ такое, что для всех $z \in \mathbf{C}$ и $n \in \mathbf{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\varphi_n(z;\ f,\ l) \leqslant \max\{\varphi_k(z;\ f,\ l):\ 0 \leqslant k \leqslant N\}. \qquad (0.1)$$

Наименьшее из чисел $N \in \mathbf{Z}_+$, для которых (0.1) выполняется, называется *l-индексом функции* f; обозначим его через $N(f;\ l)$. В частности, если $l(x) \equiv 1\ (x \geqslant 0)$, то получаем классическое определение индекса $N(f)$ целой функции f, введенное в [2]. Исследованию свойств целых функций ограниченного индекса посвящено много работ (библиографию см. в [3]). Существенный вклад в развитие теории целых функций ограниченного индекса сделал Г. Фрике [4—6]. Аналоги теорем Г. Фрике и некоторые новые теоремы, вызванные наличием l в определении (0.1), для целых функций ограниченного l-индекса анонсированы в [7], где, в частности, указаны необходимые условия ограниченности l-индекса целой функции в терминах ее логарифмической производной и поведения нулей. В настоящей статье будет доказан критерий ограниченности l-индекса целой функции в этих же терминах, причем при более общих условиях на функцию l, чем в [7].

Через Q обозначим класс положительных непрерывных на $[0, +\infty)$ функций l таких, что

$$l(x + O(1/l(x))) = O(l(x)) \quad (x \to +\infty). \qquad (0.2)$$

Для любого $r \geqslant 0$ и $l \in Q$ положим $n(r, z_0, 1/f) = \sum\limits_{|a_k - z_0| \leqslant r} 1$ и $G_r = G_r(f) = \bigcup\limits_k \{z:\ |z - a_k| \leqslant r/l(|a_k|)\}$, где a_k — нули функции f. Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $l \in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда:*

1) *для любого $r > 0$ существует $P = P(r) > 0$ такое, что $|f'(z_0)/f(z_0)| \leqslant Pl(|z_0|)$ для всякого $z_0 \in \mathbf{C} \setminus G_r$;*

2) *для любого $r > 0$ существует $\tilde{n} = \tilde{n}(r) \in \mathbf{Z}_+$ такое, что $n(r/l(|z_0|), z_0, 1/f) \leqslant \tilde{n}$ для всякого $z_0 \in \mathbf{C}$.*

При $l(x) \equiv 1$ из теоремы 1 вытекают теорема 2 и лемма 1 из [5]. Для доказательства теоремы 1 нам будут нужны некоторые другие критерии ограниченности l-индекса целой функции, обобщающие соответствующие теоремы Г. Фрике. Доказанная в § 1 теорема 2 является обобщением теоремы 1 из [4], а теоремы 5 и 6 — обобщениями теорем 4 и 5 из [6]. Доказательства этих теорем основаны на методике, разработанной Г. Фрике. В то же время наличие в определении (0.1) фактически произвольной функции l вызывает новые трудности аналитического характера, что хорошо видно при доказательстве теорем 1, 2 и подтверждается необходимостью доказательства теоремы 3.

§ 1. Вспомогательные критерии

Для целой функции f, чисел $r\geqslant 0$ и $z_0\in\mathbf{C}$ обозначим $M(r, z_0, f)=\max\{|f(z)|: |z-z_0|=r\}$ и $m(r, z_0, f)=\min\{|f(z)|: |z-z_0|=r\}$.

Теорема 2. *Пусть $l\in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда для каждого $r>0$ существуют числа $n_0=n_0(r)\in\mathbf{Z}_+$ и $P_0=P_0(r)\geqslant 1$ такие, что для любого $z_0\in\mathbf{C}$ при некотором $k_0=k_0(z_0)$, $0\leqslant k_0\leqslant n_0$, выполняется неравенство*

$$M\left(r/l(|z_0|),\ z_0,\ f^{(k_0)}\right)\leqslant P_0\left|f^{(k_0)}(z_0)\right|. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть целая функция f имеет l-индекс $N(f;\ l)=N<+\infty$, а $r>0$. Положим $l(x)\equiv l(0)$ при $x\leqslant 0$ и $\lambda(r)=\sup\{l(x+t/l(x))/l(x):\ -r\leqslant t\leqslant r,\ x\geqslant 0\}$. В силу (0.2) $1\leqslant\lambda(r)<+\infty$. Положим также $q(r)=[2(N+1)r]+1$ и для любых $z_0\in\mathbf{C}$ и $n\in\{0, 1, \ldots, q(r)\}$ определим

$$R_n(z_0, r)=\max\{\varphi_k(z;\ f,\ l):\ |z-z_0|\leqslant nr/(q(r)l(|z_0|)),\ 0\leqslant k\leqslant N\},$$

$$R_n^*(z_0, r)=\max\{a_k(z;\ f)\, l^{-k}(|z_0|):\ |z-z_0|\leqslant nr/(q(r)\, l(|z_0|)\},\quad 0\leqslant k\leqslant N\}.$$

Так как из неравенства $|z-z_0|\leqslant nr/(q(r)l(|z_0|))$ вытекает неравенство $|z_0|-r/l(|z_0|)\leqslant|z|\leqslant|z_0|+r/l(|z_0|)$, то $l(|z|)\leqslant\lambda(r)l(|z_0|)$. Отсюда следует, что $|z-z_0|\leqslant r/l(|z_0|)\leqslant r\lambda(r)/l(|z|)$, т. е. $|z|-r\lambda(r)/l(|z|)\leqslant|z_0|\leqslant|z|+r\lambda(r)/l(|z|)$ и, таким образом, $l(|z_0|)\leqslant\lambda(r\lambda(r))l(|z|)$. Поэтому

$$\{\lambda(r)\}^{-(N+1)}R_n^*(z_0, r)\leqslant R_n(z_0, r)\leqslant\{\lambda(r\lambda(r))\}^N R_n^*(z_0, r). \tag{1.2}$$

Пусть числа k_n, $0\leqslant k_n\leqslant N$, и z_n, $|z_n-z_0|\leqslant nr/(q(r)l(|z_0|))$, такие, что

$$R_n^*(z_0, r)=a_{k_n}(z_n;\ f)\, l^{-k_n}(|z_0|). \tag{1.3}$$

Выберем $z_n^*=z_0+((n-1)/n)(z_n-z_0)$. Тогда

$$|z_n^*-z_0|\leqslant(n-1)r/(q(r)\, l(|z_0|)), \tag{1.4}$$

$$|z_n^*-z_n|\leqslant r/(q(r)\, l(|z_0|)). \tag{1.5}$$

Из (1.4) и определения $R_{n-1}^*(z_0, r)$ вытекает, что $R_{n-1}^*(z_0, r)\geqslant a_{k_n}(z_n^*, f)\cdot l^{-k_n}(|z_0|)$. Поэтому в силу (1.3)

$$0\leqslant R_n^*(z_0, r)-R_{n-1}^*(z_0, r)\leqslant\left(a_{k_n}(z_n;\ f)-a_{k_n}(z_n^*;\ f)\right)l^{-k_n}(|z_0|)=$$

$$=\left(1/k_n!\,l^{k_n}(|z_0|)\right)\int_0^1\frac{d}{dt}\left|f^{(k_n)}\left(z_n^*+t\left(z_n-z_n^*\right)\right)\right|dt.$$

Отсюда поскольку $\frac{d}{dt}|\varphi(t)|\leqslant\left|\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|$ для любой комплекснозначной функции φ действительного переменного t, получаем, что

$$R_n^*(z_0, r)-R_{n-1}^*(z_0, r)\leqslant\frac{|z_n-z_n^*|}{k_n!\,l^{k_n}(|z_0|)}\int_0^1\left|f^{(k_n+1)}\left(z_n^*+t\left(z_n-z_n^*\right)\right)\right|dt=$$

$$=a_{k_n+1}\left(z_n^*+t^*\left(z_n-z_n^*\right);\ f\right)l^{-k_n-1}(|z_0|)\, l(|z_0|)(k_n+1)\left(z_n-z_n^*\right),$$

$$0\leqslant t^*\leqslant 1.$$

Таким образом, используя неравенства (1.5) и $k_n\leqslant N$ и определения $R_n^*(z_0, r)$ и $q(r)$, имеем $R_n^*(z_0, r)-R_{n-1}^*(z_0, r)\leqslant R_n^*(z_0, r)/2$, т. е. $R_n^*(z_0, r)\leqslant 2R_{n-1}^*(z_0, r)$, и в силу (1.2) $R_n(z_0, r)\leqslant\{\lambda(r\lambda(r))\}^N R_n^*(z_0, r)\leqslant 2\{\lambda(r\lambda(r))\}^N R_{n-1}^*(z_0, r)\leqslant 2\{\lambda(r\lambda(r))\}^N(\lambda(r)\}^{N+1}R_{n-1}(z_0, r)$. Поэтому

$$\max\{\varphi_k(z;\,f,\,l)\colon\ |z-z_0|\leqslant r/l(|z_0|),\ 0\leqslant k\leqslant N\}=R_{q(r)}(z_0,\,r)\leqslant$$
$$\leqslant P_0^*(r)\,R_0(z_0,\,r)=P_0^*(r)\max\{\varphi_k(z_0;\,f,\,l)\colon\ 0\leqslant k\leqslant N\},\tag{1.6}$$

где $P_0^*(r)=2^{q(r)}\{\lambda(r\lambda(r))\}^{Nq(r)}\{\lambda(r)\}^{(N+1)q(r)}$.

Пусть k_0, $0\leqslant k_0=k_0(z_0)\leqslant N$, такое, что $\max\{\varphi_k(z_0;\ f,\ l)\colon 0\leqslant k\leqslant\leqslant N\}=\varphi_{k_0}(z_0;\ f,\ l)$. Для этого k_0 ввиду (1.6)

$$\max\{\varphi_{k_0}(z;\,f,\,l)\colon\ |z-z_0|\leqslant r/l(|z_0|)\}\leqslant P_0^*(r)\,\varphi_{k_0}(z_0;\,f,\,l).\tag{1.7}$$

Пусть $M\left(r/l(|z_0|),\,z_0,\,f^{(k_0)}\right)=\left|f^{(k_0)}(z^*)\right|$, $|z^*-z_0|=r/l(|z_0|)$. Тогда в силу (1.7) $|f^{(k_0)}(z^*)|/l^{k_0}(|z^*|)\leqslant P_0^*(r)\,|f^{(k_0)}(z_0)|/l^{k_0}(|z_0|)$, т. е. $|f^{(k_0)}(z^*)|\leqslant\leqslant P_0^*(r)\{l(|z^*|)/l(|z_0|)\}^{k_0}\,|f^{(k_0)}(z_0)|\leqslant P_0^*(r)\{\lambda(r)\}^{k_0}|f^{(k_0)}(|z_0|)|\leqslant\leqslant P_0^*(r)\{\lambda(r)\}^N|f^{(k_0)}(z_0)|$. Отсюда, положив $n_0=n_0(r)\equiv N=N(f;\ l)$ и $P_0==P_0(r)=P_0^*(r)\{\lambda(r)\}^N$, получаем (1.1).

Наоборот, пусть для любого $r>0$ существуют $n_0=n_0(r)\in\mathbf{Z}_+$ и $P_0==P_0(r)\geqslant 1$ такие, что для каждого $z_0\in\mathbf{C}$ при некотором $k_0=k_0(z_0)$, $0\leqslant k_0\leqslant n_0$, выполняется (1.1). Возьмем $r=2$, $n_0=n_0(2)$, $P_0=P_0(2)$ и положим $j_0=[(\ln P_0)/\ln 2]+1$. Для любой точки $z_0\in\mathbf{C}$, для соответствующего $k_0=k_0(z_0)$ и всех $j>j_0$ в силу неравенства Коши и (1.1)

$$|f^{(k_0+j)}(z_0)/j!\leqslant\{l(|z_0|)/2\}^j M\left(2/l(|z_0|),\,z_0,\,f^{(k_0)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant P_0\{l(|z_0|)/2\}^j\,|f^{(k_0)}(z_0)|,$$

т. е. $\varphi_{k_0+j}(z_0;\,f,\,l)\leqslant(j!k_0!/(k_0+j)!)\,P_02^{-j}\varphi_{k_0}(z_0;\,f,\,l)\leqslant\varphi_{k_0}(z_0;\,f;\,l)$. Поэтому $\max\{\varphi_n(z_0;\ f,\ l)\colon\ n\in\mathbf{Z}_+\}=\max\{\varphi_n(z_0;\ f,\ l)\colon\ 0\leqslant n\leqslant k_0+j_0\}$. Отсюда, поскольку $k_0\leqslant n_0$, вытекает, что функция f имеет l-индекс $N(f;\ l)\leqslant\leqslant n_0+j_0$. Теорема 2 полностью доказана.

Теорема 3. *Пусть $l\in Q$, а l_* — непрерывная на $[0,\ +\infty)$ функция такая, что $l(x)/\theta\leqslant l_*(x)\leqslant\theta l(x)$, $1\leqslant\theta\equiv\mathrm{const}$, для всех $x\geqslant 0$. Для того чтобы целая функция f имела ограниченный l-индекс, необходимо и достаточно, чтобы f была ограниченного l_* -индекса.*

Доказательство. Пусть $N(f;\ l_*)<+\infty$. Тогда для всех $z\in\mathbf{C}$ и $n\geqslant N(f;\ l_*)+1$ имеем

$$\varphi_n(z;\,f,\,\theta l)=\varphi_n(z;\,f,\,l_*)\{l_*(|z|)/(\theta l(|z|))\}^n\leqslant$$
$$\leqslant\{l_*(|z|)/(\theta l(|z|))\}^n\max\{\varphi_k(z;\,f,\,l_*)\colon\ 0\leqslant k\leqslant N(f;\ l_*)\}=$$
$$=\{l_*(|z|)/(\theta l(|z|))\}^n\max\{\varphi_k(z;\,f,\,\theta l)\{\theta l(|z|)/l_*(|z|)\}^k\colon\ 0\leqslant k\leqslant N(f;\,l_*)\}\leqslant$$
$$\leqslant\{l_*(|z|)/(\theta l(|z|))\}^{n-k_0}\max\{\varphi_k(z;\,f,\theta l)\colon\ 0\leqslant k\leqslant N(f;\ l_*)\},\tag{1.8}$$

где $0\leqslant k_0=k_0(z)\leqslant N(f;\ l_*)$. Так как $l_*(|z|)\leqslant\theta l(|z|)$ и $n-k_0\geqslant 1$, то из (1.8) следует $N(f;\ \theta l)\leqslant N(f;\ l_*)<+\infty$. Функция $\theta l(x)$ удовлетворяет условию (0.2). Поэтому по теореме 2 для любого $r>0$ существуют $n_0^*(r)\in\mathbf{Z}_+$ и $P_0^*(r)\geqslant 1$ такие, что для каждого $z_0\in\mathbf{C}$ при некотором $k_0=k_0(z_0)$, $0\leqslant k_0\leqslant n_0^*(r)$, выполняется неравенство

$$M(r/(\theta l(|z_0|)),\,z_0,\,f)\leqslant P_0^*(r)\,|f^{(k_0)}(z_0)|.\tag{1.9}$$

Взяв в (1.9) r вместо r/θ, получаем, что для любого $r>0$ существуют $n_0(r)=n_0^*(\theta r)\in\mathbf{Z}_+$ и $P_0(r)=P_0^*(\theta r)\geqslant 1$ такие, что для каждого $z_0\in\mathbf{C}$ при некотором $k_0=k_0(z_0)$, $0\leqslant k_0\leqslant n_0(r)$, выполняется неравенство (1.1). Поэтому по теореме 2 $N(f;\ l)<+\infty$.

Пусть теперь $N(f;\ l)<+\infty$. Тогда, как показано выше, $N(f;\ l(\theta)<<+\infty$. Поэтому, как при доказательстве неравенства (1.8), для всех $n\geqslant N(f;\ l/\theta)+1$ и $z\in\mathbf{C}$ имеем $\varphi_n(z;\,f,\,l_*)\leqslant\{l(|z|)/(\theta l_*(|z|))\}^{n-k_0}\cdot\max\{\varphi_k(z;\ f,\ l_*)\colon\ 0\leqslant k\leqslant N(f;\,l/\theta)\}$, где $0\leqslant k_0\leqslant N(f;\ l/\theta)$. Отсюда, как и выше, вытекает, что $N(f;\ l_*)\leqslant N(f;\ l/(\theta)<+\infty$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть $l \in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда существуют $r_0 > 1$, $n_0 \in \mathbf{Z}_+$ и $P_0 \geqslant 1$ такие, что для любого $z_0 \in \mathbf{C}$ при некотором $k_0 = k_0(z_0)$, $0 \leqslant k_0 \leqslant n_0$, справедливо неравенство* (1.1).

Доказательство. Необходимость является простым следствием теоремы 2. Докажем достаточность. Если $r_0 \geqslant 2$, то $M(2/l(|z_0|), z_0, f^{(k_0)}) \leqslant M(r_0/l(|z_0|), z_0, f^{(k_0)}) \leqslant P_0 |f^{(k_0)}(z_0)|$, т. е. выполнено (1.1) с $r = 2$. Из доказательства достаточности в теореме 2 видно, что $N(f;\ l) < +\infty$. Если же $r_0 < 2$, то $M(r_0/l(|z_0|), z_0, f^{(k_0)}) \leqslant P_0 |f^{(k_0)}(z_0)|$, т. е. выполнено (1.1) с $r = 2$ и $2l(|z_0|)/r_0$ вместо $l(|z_0|)$. Поэтому $N(f;\ 2l/r_0) < +\infty$, и по теореме 3 $N(f;\ l) < +\infty$.

Теорема 5. *Пусть $l \in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда для любых чисел $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ существует число $P_1(r_1, r_2) \geqslant 1$ такое, что для всех $z_0 \in \mathbf{C}$*

$$M(r_2/l(|z_0|), z_0, f) \leqslant P_1(r_1, r_2) M(r_1/l(|z_0|), z_0, f). \tag{1.10}$$

Доказательство. Пусть $N(f;\ l) < +\infty$. Предположим от противного, что существуют числа $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ такие, что для любого $P_* > 1$ существует $z_0 = z_0(P_*) \in \mathbf{C}$ такое, что

$$M(r_2/l(|z_0|), z_0, f) > P_* M(r_1/l(|z_0|), z_0, f). \tag{1.11}$$

По теореме 2 существуют $n_0 = n_0(r_2) \in \mathbf{Z}_+$ и $P_0 = P_0(r_2) \geqslant 1$ такие, что для любого $z_0 \in \mathbf{C}$ при некотором $k_0 = k_0(z_0)$, $0 \leqslant k_0 \leqslant n_0$, верно неравенство (1.1) с r_2 вместо r. Выберем

$$P_* = n_0!\,(r_2/r_1)^{n_0}(P_0 + r_1/(r_2 - r_1)) + 1, \tag{1.12}$$

и пусть $z_0 = z_0(P_*)$ — соответствующая точка, для которой выполняется (1.11), а $k_0 \leqslant n_0$ такое, что имеет место (1.1) с r_2 вместо r.

Пусть $M(r_1/l(|z_0|), z_0, f) = |f(z^*)|$, а $M(r_2/l(|z_0|), z_0, f^{(j)}) = |f^{(j)}(z_j^*)|$, $j \in \mathbf{Z}_+$. Тогда по неравенству Коши

$$|f^{(j)}(z_0)|/j! \leqslant (l(|z_0|)/r_1)^j |f(z^*)|,\quad j \in \mathbf{Z}_+, \tag{1.13}$$

$$|f^{(j)}(z_j^*) - f^{(j)}(z_0)| = \left|\int_{z_0}^{z_j^*} f^{(j+1)}(z)\,dz\right| \leqslant |f^{(j+1)}(z_{j+1}^*)|\, r_2/l(|z_0|). \tag{1.14}$$

Из (1.13) и (1.14) следует, что

$$|f^{(j+1)}(z_{j+1}^*)| \geqslant (l(|z_0|)/r_2)\{|f^{(j)}(z_j^*)| - |f^{(j)}(z_0)|\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{l(|z_0|)}{r_2}|f^{(j)}(z_j^*)| - \frac{j!\,l^{j+1}(|z_0|)}{r_2 r_1^j}|f(z^*)|,\quad j \in \mathbf{Z}_+,$$

откуда

$$|f^{(k_0)}(z_{k_0}^*)| \geqslant \frac{l(|z_0|)}{r_2}|f^{(k_0-1)}(z_{k_0-1}^*)| - \frac{(k_0-1)!\,l^{k_0}(|z_0|)}{r_2 r_1^{k_0-1}}|f(z^*)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{l^2(|z_0|)}{r_2^2}|f^{(k_0-2)}(z_{k_0-2}^*)| - \left\{\frac{(k_0-2)!}{r_2^2 r_1^{k_0-2}} + \frac{(k_0-1)!}{r_2 r_1^{k_0-1}}\right\} l^{k_0}(|z_0|)|f(z^*)| \geqslant \ldots$$
$$\ldots \geqslant \frac{l^{k_0}(|z_0|)}{r_2^{k_0}}|f(z^*)|\left\{\frac{|f(z_0^*)|}{|f(z^*)|} - \sum_{j=0}^{k_0-1} j!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j\right\}. \tag{1.15}$$

Так как в силу (1.11) $|f(z_0^*)|/|f(z^*)| \geqslant P_*$, а

$$\sum_{j=0}^{k_0-1} j!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j \leqslant k!\,\frac{(r_2/r_1)^{k_0}-1}{r_2/r_1 - 1} \leqslant n_0!\,\frac{r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0},$$

то

$$|f(z_0^*)|/|f(z^*)| - \sum_{j=0}^{k_0-1} j!(r_2/r_1)^j > 0.$$

Поэтому из (1.15) в силу (1.13) и (1.1) имеем

$$|f^{(k_0)}(z_{k_0}^*)| \geqslant \left(\frac{l(|z_0|)}{r_2}\right)^{k_0} \left(P_* - n_0! \frac{r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\right)\left(\frac{r_1}{l(|z_0|)}\right)^{k_0} \times$$

$$\times \frac{|f^{(k_0)}(z_0)|}{k_0!} \geqslant \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n_0} \frac{1}{n_0!}\left(P_* - n_0! \frac{r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\right)\frac{1}{P_0}|f^{(k_0)}(z_{k_0}^*)|,$$

откуда вытекает, что $P_* \leqslant n_0!(r_2/r_1)^{n_0}(P_0 + r_1/(r_2 - r_1))$, а это невозможно в силу (1.12). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $z_0 \in \mathbf{C}$ — произвольное число. Разложим функцию f в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m, \quad |b_m| = a_m(z_0; f). \tag{1.16}$$

Пусть $\mu(r, z_0, f) = \max\{|b_m|r^m: m \geqslant 0\}$ — максимальный член ряда (1.16), а $\nu(r, z_0, f) = \max\{m \geqslant 0: |b_m|r^m = \mu(r, z_0, f)\}$ — его центральный индекс. Тогда

$$\mu(r, z_0, f) \leqslant M(r, z_0, f) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|(2r)^m 2^{-m} \leqslant 2\mu(2r, z_0, f),$$

$$\ln\mu(2r, z_0, f) - \ln\mu(r, z_0, f) = \int_r^{2r} \frac{\nu(t, z_0, f)}{t}\,dt \geqslant \nu(r, z_0, f)\ln 2,$$

т. е.

$$\nu(r, z_0, f) \leqslant 1 + \{\ln M(2r, z_0, f) - \ln M(r/2, z_0, f)\}/\ln 2. \tag{1.17}$$

Пусть $N(f; l; z_0)$ — l-индекс функции f в точке z_0, т. е. наименьшее из чисел N, для которых справедливо неравенство (0.1) с $z = z_0$. Легко видеть, что $N(f; l; z_0) \leqslant \nu(1/l(|z_0|), z_0, f)$. С другой стороны, взяв в (1.10) $r_2 = 2$ и $r_1 = 1/2$, имеем $M(2/l(|z_0|), z_0, f) \leqslant P_1^* M(1/(2l(|z_0|)), z_0, f)$, где $P_1^* = P_1(1/2, 2)$. Поэтому из (1.17) получаем неравенство $N(f; l; z_0) \leqslant 1 + (\ln P_1^*)/\ln 2$ для любого $z_0 \in \mathbf{C}$ и, значит, $N(f; l) \leqslant 1 + (\ln P_1^*)/\ln 2$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть $l \in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда для любого $R > 0$ существуют $P_2(R) \geqslant 1$ и $\eta(R) \in (0, R)$ такие, что для каждого $z_0 \in \mathbf{C}$ и некоторого $r \in [\eta(R), R]$ выполняется неравенство*

$$M(r/l(|z_0|), z_0, f) \leqslant P_2(R) m(r/l(|z_0|), z_0, f). \tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть $N(f; l) = N < +\infty$ и $R > 0$. Положим $R_0 = 1, r_0 = \frac{R}{8(R+1)}$, $R_j = \frac{R_{j-1}}{4N} r_{j-1}^N$, $r_j = \frac{1}{8}R_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Пусть $z_0 \in \mathbf{C}$ и $N_0 = N(f; l; z_0)$. Ясно, что $0 \leqslant N_0 \leqslant N$. Разложим функцию f в ряд (1.16) и положим $c_m = |b_m| l^{-m}(|z_0|) = \varphi_m(z_0; f, l)$. Из определения N_0 вытекает, что для всех $m \in \mathbf{Z}_+$ выполняется неравенство $c_{N_0} \geqslant R_0 c_m$, т. е. существует наименьшее из $\{0, 1, \ldots, N_0\}$ число n_0 такое, что $c_{n_0} \geqslant c_m R_{N_0 - n_0}$ для всех $m \in \mathbf{Z}_+$. Тогда $c_{n_0} \geqslant c_{N_0} R_{N_0 - n_0}$ и $c_j < c_{N_0} R_{N_0 - n_0}$ при $j < n_0$, ибо если $c_{j_0} \geqslant c_{N_0} R_{N_0 - n_0}$ при некотором $j_0 < n_0$, то $c_{j_0} \geqslant$ $\geqslant c_m R_{N_0 - n_0}$ для всех $m \in \mathbf{Z}_+$, что противоречит выбору числа n_0. Поэтому если $|z - z_0| = r_{N_0 - n_0}/l(|z_0|)$, то

$$|f(z)| \geqslant |b_{n_0}||z-z_0|^{n_0} - \sum_{m\neq n_0} |b_m||z-z_0|^m = c_{n_0} r^{n_0}_{N_0-n_0} - \sum_{m\neq n_0} c_m r^m_{N_0-n_0} \geqslant$$

$$\geqslant c_{N_0} R_{N_0-n_0} r^{n_0}_{N_0-n_0} - \sum_{m<n_0} c_{N_0} R_{N_0-m} r^m_{N_0-n_0} - \sum_{m>n_0} c_{N_0} r^m_{N_0-n_0} \geqslant$$

$$\geqslant c_{N_0} R_{N_0-n_0} r^{n_0}_{N_0-n_0} - n_0 c_{N_0} R_{N_0-n_0-1} - c_{N_0} r^{n_0+1}_{N_0-n_0} \frac{1}{1-r_{N_0-n_0}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} c_{N_0} R_{N_0-n_0} r^{n_0}_{N_0-n_0}. \tag{1.19}$$

Для этих же значений z также имеем

$$|f(z)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |b_m||z-z_0|^m \leqslant c_{N_0} \sum_{m=0}^{\infty} r^m_{N_0-n_0} = \frac{8}{7} c_{N_0}. \tag{1.20}$$

Из (1.19) и (1.20) вытекает, что

$$M\left(r_{N_0-n_0}/l(|z_0|), z_0, f\right) \leqslant (8/7) a_{N_0} \leqslant (16/7) R^{-1}_{N_0-n_0} r^{-n_0}_{N_0-n_0} \times$$

$$\times m\left(r_{N_0-n_0}/l(|z_0|), z_0, f\right),$$

т. е. выполнено (1.18) с $P_2(R) = 16/\left(7R_N r_N^N\right)$, $\eta(R) = r_N = R_N/8, r = r_{N_0-n_0}$. Необходимость доказана.

Чтобы доказать достаточность, покажем, что существует число P^* такое, что для всех $z_0 \in \mathbf{C}$

$$M(2/l(|z_0|), z_0, f) \leqslant P_1^* M(1/l(|z_0|), z_0, f), \tag{1.21}$$

так как из (1.21), как и при доказательстве теоремы 5, получим ограниченность l-индекса функции f.

Положим $R = 1/2$. Тогда существуют $P_2^* = P_2(1/2)$ и $\eta = \eta(1/2) \in (0, 1/2)$ такие, что для любого $z^* \in \mathbf{C}$ и некоторого $r \in [\eta, 1/2]$

$$M(r/l(|z^*|), z^*, f) \leqslant P_2^* m(r/l(|z^*|), z^*, f). \tag{1.22}$$

Обозначим $l^* = \max\{l(|z|)\colon |z-z_0| = 2/l(|z_0|)\}$, $\rho_0 = 1/(2l(|z_0|))$ и $\rho_k = \rho_0 + k\eta/l^*$, $k \in \mathbf{Z}_+$. Тогда, как видно из доказательства теоремы 2, $l^* = \xi l(|z_0|)$, $1/\lambda(2\lambda(2)) \leqslant \xi \leqslant \lambda(2)$ и, значит, $\rho_k = (1/2 + k\eta/\xi)/l(|z_0|)$. Поэтому существует не зависящее от z_0 число $n^* \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho_{n-1} < 2/l(|z_0|) \leqslant \rho_n$ при некотором $n \leqslant n^*$.

Пусть $C_k = \{z\colon |z-z_0| = \rho_k\}$, $\left|f\left(z_k^{**}\right)\right| = \max\{|f(z)|\colon z \in C_k\}$, а z_k^* — точка пересечения отрезка $\left[z_0, z_k^{**}\right]$ с окружностью C_{k-1}. Тогда $\left|z_k^{**} - z_k^*\right| = \eta/l^* \leqslant \eta/l\left(\left|z_k^*\right|\right) < 1/\left(2l\left(\left|z_k^*\right|\right)\right)$, и в силу (1.22) при некотором $r \in [\eta, 1/2]$ имеет место неравенство $\left|f\left(z_k^{**}\right)\right| \leqslant M\left(r/l\left(\left|z_k^*\right|\right), z_k^*, f\right) \leqslant P_2^* m\left(r/l\left(\left|z_k^*\right|\right), z_k^*, f\right) \leqslant P_2^* \max\{|f(z)|\colon z \in C_{k-1}\}$. Таким образом,

$$M(2/l(|z_0|), z_0, f) \leqslant \max\{|f(z)|\colon z \in C_n\} \leqslant P_2^* \max\{|f(z)|\colon z \in C_{n-1}\} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \left(P_2^*\right)^n \max\{|f(z)|\colon z \in C_0\} \leqslant \left(P_2^*\right)^{n^*} M(1/(2l(|z_0|)), z_0, f),$$

т. е. справедливо неравенство (1.21) с $P_1^* = \left(P_2^*\right)^{n^*}$, и тем самым теорема 6 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\lambda(r)$ определено, как при доказательстве теоремы 2. Покажем, что $|z_0 - a_k| > r/(2\lambda(r) l(|z_0|))$ для любого $z_0 \in \mathbf{C}\backslash G_r (r > 0)$ и всех $k \in \mathbf{N}$. Допустим от противного, что существуют $z_0 \in \mathbf{C}\backslash G_r$ и $k \in \mathbf{N}$ такие, что $|z_0 - a_k| \leqslant r/(2\lambda(r) l(|z_0|)) < r/l(|z_0|)$. Тогда, как показано при доказательстве теоремы 2, $l(|a_k|) \leqslant \lambda(r) l(|z_0|)$ и, значит, $|z_0 - a_k| \leqslant$

$\leqslant r/(2l(|a_k|))<r/l(|a_k|)$, что невозможно в силу того, что $z_0\in \mathbf{C}\setminus G_r$.

Возьмем теперь в теореме 6 $R=r/(2\lambda(r))$. Тогда существуют $P_2\geqslant 1$ и $\eta\in(0,\ r/(2\lambda(r)))$ такие, что для любого $z_0\in\mathbf{C}$ и некоторого $r^*\in\in[\eta,\ r/(2\lambda(r))]$ выполняется неравенство (1.18) с r^* вместо r. Поэтому, используя неравенство Коши, имеем $|f'(z_0)|\leqslant(l(|z_0|)/r^*)M(r^*/l(|z_0|),\ z_0,\ f)\leqslant(P_2/\eta)l(|z_0|)m(r^*/l(|z_0|),\ z_0,\ f)$. Но для любого $z_0\notin G_r$ круг $\{z\colon |z-z_0|\leqslant r/(2\lambda(r)l(|z_0|))\}$ в силу неравенства $|z_0-a_k|>>r/(2\lambda(r)l(|z_0|))$ не содержит нулей функции f. Поэтому $|f(z_0)|\geqslant\geqslant m(r^*/l(|z_0|),\ z_0,\ f)$ и, таким образом, $|f'(z_0)/f(z_0)|\leqslant(P_2/\eta)l(|z_0|)$, т. е. свойство 1 теоремы 1 с $P=P_2/\eta$ доказано.

Прежде чем доказывать свойство 2, покажем, что если функция f имеет ограниченный l-индекс, то для любого $R>0$ существует $P_3(R)>0$ такое, что для всех $z_0\in\mathbf{C}$ и всех $0<r\leqslant R$ выполняется неравенство

$$n(r/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/f)m(r/l(|z_0|),\ z_0,\ f)\leqslant rP_3(R)M(R/l(|z_0|),\ z_0,\ f). \quad (2.1)$$

Действительно, по теореме 5 для любого $R>0$ существует $P_4(R)==P_1(R,\ 2R)\geqslant 1$ такое, что для всех $z_0\in\mathbf{C}$ верно неравенство $M(2R/l(|z_0|),\ z_0,\ f)\leqslant P_4(R)M(R/l(|z_0|),\ z_0,\ f)$. Отсюда, используя неравенство Коши, для всех z, $|z-z_0|=R/l(|z_0|)$, имеем

$$|f'(z)|\leqslant(2/R)l(|z_0|)M(2R/l(|z_0|),\ z_0,\ f)\leqslant$$
$$\leqslant(2/R)P_4(R)l(|z_0|)M(R/l(|z_0|),\ z_0,\ f). \quad (2.2)$$

Если $f(z)\neq 0$ на $\{z\colon |z-z_0|=r/l(|z_0|)\}$, то

$$n(r/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/f)=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r/l(|z_0|)}(f'(z)/f(z))\,dz\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M(r/l(|z_0|),z_0,f')}{m(r/l(|z_0|),z_0,f)}\,\frac{r}{l(|z_0|)}. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и 2.3 вытекает, что $n(r/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/f)m(r/l(|z_0|),\ z_0,\ f)\leqslant\leqslant(2/R)P_4(R)rM(R/l(|z_0|),\ z_0,\ f)$, т. е. выполнено (2.1) с $P_3(R)==2P_4(R)/R$. Если же на $\{z\colon |z-z_0|=r/l(|z_0|)\}$ имеются нули функции f, то неравенство (2.1) очевидно.

Возьмем теперь в теореме 6 $R=1$. Тогда существуют $P_2\geqslant 1$ и $\eta\in\in(0,\ 1)$ такие, что для любого $z_0\in\mathbf{C}$ и некоторого $r_*\in[\eta,1]$ выполняется неравенство (1.18) с r_* вместо r. По теореме 5 существует $P_5==P_1(\eta,\ 1)$ такое, что для всех $z_0\in\mathbf{C}$ имеет место неравенство $M(1/l(|z_0|),z_0,f)\leqslant P_5M(\eta/l(|z_0|),z_0,f)\leqslant P_5M(r_*/l(|z_0|),z_0,f)$. Поэтому для любого $z_0\in\mathbf{C}$ существует $r_*\in[\eta,1]$ такое, что

$$M(1/l(|z_0|),\ z_0,\ f)\leqslant P_2P_5m(r^*/l(|z_0|),\ z_0,\ f). \quad (2.4)$$

Но в силу (2.1) существует $P_6=P(1)$ такое, что $n(r_*/l(|z_0|),z_0,1/f)m(r_*/ /l|z_0|),z_0,f)\leqslant P_6r_*M(1/l(|z_0|),z_0,f)$. Поэтому из (2.4) получаем неравенство $n(\eta/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/f)\leqslant P_7=P_2P_5P_6$.

Пусть теперь $r>\eta=\eta(1)$ — произвольное число и $l_*=\max\{l(|z|)\colon :|z-z_0|=r/l(|z_0|)\}$. Тогда $l_*\leqslant\lambda(r)l(|z_0|)$. Положим $\rho=\eta/(\lambda(r)l(|z_0|))$ и $R=r/l(|z_0|)$. Нетрудно показать, что любой замкнутый круг $\overline{K}$ радиуса R можно покрыть конечным числом m замкнутых кругов $\overline{K}_j$ радиуса ρ с центрами в $\overline{K}$, причем $m\leqslant B(R/\rho)^2$, где B — абсолютная постоянная. Пусть $\overline{K}=\{z\colon |z-z_0|\leqslant R\}$, а $\overline{K}_j$ — соответствующие круги радиуса $\rho=\eta/\lambda(r)l(|z_0|))$ с центрами z_j, $|z_j-z_0|\leqslant r/l(|z_0|)$. Так как $\eta/l(|z_j|)\geqslant\eta/l_*\geqslant\eta/(\lambda(r)l(|z_0|))=\rho$, то в каждом $\overline{K}_j$ содержится не более чем P_7 нулей функции f. Поэтому в круге $\overline{K}$ содержится не более чем $BP_7(R/\rho)^2=BP_7(r\lambda(r)/\eta)^2$ нулей функции f. Таким образом, $n(r/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/f)\leqslant\tilde{n}(r)=[BP_7(r\lambda(r)/\eta)^2]+1$, т. е. свойство 2 теоремы 1 доказано.

Наоборот, пусть выполнены условия 1 и 2. Из свойства 2 вытекает, что для любого $R>0$ существует $\tilde{n}(R)\in\mathbf{Z}_+$ такое, что в любом круге

$\overline{K}=\{z\colon |z-z_0|\leqslant R/l(|z_0|)\}$ количество нулей функции f не превышает $\tilde{n}(R)$. Положим $a=a(R)=R/(2(\tilde{n}(R)+1)\lambda(R\lambda(R)))$. По условию 1 существует $P=P(R)\geqslant 1$ такое, что $|f'(z)/f(z)|\leqslant Pl(|z|)$ для всех $z\in \in \mathbf{C}\setminus G_a$, т. е. для всех z, лежащих вне кругов $\{z\colon |z-a_n|\leqslant \leqslant a(R)\lambda(R\lambda(R))/l(|z_0|)=R/(2(\tilde{n}(R)+1)l(|z_0|))\}$. Суммарная длина диаметров этих кругов не превышает числа $R\tilde{n}(R)/((\tilde{n}(R)+1)l(|z_0|))< < R/l(|z_0|)$. Поэтому существует окружность $\{z\colon |z-z_0|=r/l(|z_0|)\}$ с $R/(4(\tilde{n}(R)+1)\lambda(R\lambda(R)))=\eta(R)<r<R$, на которой $|f'(z)/f(z)|\leqslant \leqslant Pl(|z|)\leqslant Pl(|z_0|)\lambda(R)$. Для любых точек z_1 и z_2, лежащих на этой окружности, имеем

$$\ln\left|\frac{f(z_1)}{f(z_2)}\right|\leqslant\int\limits_{z_1}^{z_2}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right||dz|\leqslant P\lambda(R)\,l(|z_0|)\,\frac{2r}{l(|z_0|)}\leqslant 2R\lambda(R)\,P(R).$$

Отсюда вытекает, что $M(r/l(|z_0|),\ z_0,\ f)\leqslant P_2m(r/l(|z_0|),\ z_0,\ f)$, где $P_2= =P_2(R)=\exp\{2R\lambda(R)P(R)\}$, т. е. в силу теоремы 6 функция f имеет ограниченный l-индекс.

Следствие. *Пусть $l\in Q$, f — целая функция ограниченного l-индекса, φ — целая функция и $\psi(z)=\varphi(z)f(z)$. Для того чтобы функция ψ была функцией ограниченного l-индекса, необходимо и достаточно, чтобы функция φ была функцией ограниченного l-индекса.*

Доказательство. Так как f — функция ограниченного l-индекса, то по теореме 1 для любого $r>0$ существует $\tilde{n}(r)\in\mathbf{Z}_+$ такое, что $n(r/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/f)\leqslant\tilde{n}(r)$ для всех $z_0\in\mathbf{C}$. Поэтому $n(r/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/\varphi)\leqslant \leqslant n(r/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/\psi)\leqslant n(r/l(|z_0|),\ z_0,\ 1/\varphi)+\tilde{n}(r)$, т. е. условие 2 теоремы 1 для функций φ и ψ выполняется или не выполняется одновременно.

Если теперь φ имеет ограниченный l-индекс, то для любого $r>0$ существуют числа $P_f(r)>0$ и $P_\varphi(r)>0$ такие, что $|f'(z)/f(z)|\leqslant \leqslant P_f(r)l(|z|)$ и $|\varphi'(z)/\varphi(z)|\leqslant P_\varphi(r)l(|z|)$ для всех $z\in(\mathbf{C}\setminus G_r(f))\cap \cap(\mathbf{C}\setminus G_r(\varphi))$. Так как $\mathbf{C}\setminus G_r(\psi)\subset(\mathbf{C}\setminus G_r(f))\cap(\mathbf{C}\setminus G_r(\varphi))$ и $\psi'/\psi=\varphi'/\varphi+f'/f$, то для всех $z\in\mathbf{C}\setminus G_r(\psi)$ справедливо неравенство $|\psi'(z)/\psi(z)|\leqslant \leqslant(P_f(r)+P_\varphi(r))l(|z|)$, т. е. по теореме 1 функция ψ имеет ограниченный l-индекс.

Наоборот, пусть ψ — функция ограниченного l-индекса, $r>0$ и $z_0\in \in\mathbf{C}\setminus G_r(\varphi)$, т. е. $|z_0-b_n|>r/l(|b_n|)$ для всех $n\in\mathbf{N}$, где b_n — нули функции φ. Тогда, как при доказательстве теоремы 1, нетрудно показать, что $|z_0-b_n|\geqslant r/(\lambda(r)l(|z_0|))$ для всех $n\in\mathbf{N}$. Рассмотрим круг $\overline{K}= =\{z\colon |z-z_0|\leqslant r/(2\lambda(r)l(|z_0|))\}$, который не содержит нулей функции φ, но может содержать нули c_n функции ψ. Так как ψ — функция ограниченного l-индекса, то количество c_n в круге $\overline{K}$ не превышает некоторого числа $\tilde{n}_1=\tilde{n}_1(r/(2\lambda(r)))$. Поскольку для всех $c_n\in\overline{K}$ выполняется неравенство $l(|z_0|)\leqslant\lambda(r\lambda(r))l(|c_n|)$, то каждый круг $\{z\colon |z-c_n|\leqslant \leqslant r_1/l(|c_n|)\}$ с $r_1=r/(4(\tilde{n}_1+1)\lambda(r)\lambda(r\lambda(r)))$ содержится в соответствующем круге $\{z\colon |z-c_n|\leqslant r_1\lambda(r\lambda(r))/l(|z_0|)\}$. Суммарная длина диаметров последних кругов не превышает $2\tilde{n}_1r_1\lambda(r\lambda(r))/l(|z_0|)=(\tilde{n}_1/(\tilde{n}_1+ +1))r/(2\lambda(r)l(|z_0|))\leqslant r/(2\lambda(r)l(|z_0|))$, т. е. существует $r^*\in(0,r/(2\lambda(r)))$ такое, что если $|z-z_0|=r^*/l(|z_0|)$, то $z\notin G_{r_1}(\psi)\supset G_{r_1}(f)$. Для таких z в силу теоремы 1 $|\varphi'(z)/\varphi(z)|\leqslant|\psi'(z)/\psi(z)|+|f'(z)/f(z)|\leqslant\big(P^*_\psi+ +P^*_f\big)\,l(|z_0|)$, где P^*_ψ и P^*_f зависят только от r_1, т. е. от r. Так как φ'/φ — аналитическая в круге $\overline{K}$ функция, то это неравенство справедливо и в точке z_0, т. е. по теореме 1 функция φ имеет ограниченный l-индекс. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузык А. Д., Шеремета М. Н.* Целые функции ограниченного l-распределения значений // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 1. С. 3—13.
2. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire

functions of bounded index // Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. Providence. 1968. V. 11. P. 298—307.
3. *Shah S. M.* Entire functions of bounded index // Lecture Notes in Math. 1977. V. 599. P. 117—145.
4. *Fricke G. H.* A characterization of functions of bounded index // Indian J. Math. 1972. V. 14, N 3. P. 207—212.
5. *Fricke G. H.* Functions of bounded index and their logarithmic derivatives // Math. Ann. 1973. Bd 203. S. 215—223.
6. *Fricke G. H.* Entire functions of locally slow growth // Итон леаналиса математит. 1975.. Т. 28. С. 101—122.
7. *Кузык А. Д., Шеремета М. Н.* Целые функции ограниченного l-индекса // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 6. С. 15—17.

г. Львов,
г. Дрогобыч

Статья поступила
12 января 1990 г.