ряда по степеням ε:

$$u(x, t, \varepsilon) = -\frac{t}{t+1}\frac{x^3}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{(-1)^n (2n-1)!!x^{n+3}}{(n+3)!(t+1)^{2n+1}}.$$

Полученный ряд сходится при $|\varepsilon| < 1/2x$ равномерно в области

$$G = \{(t, x): t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant X\}.$$

Литература

1. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
2. Качалов В. И., Ломов С. А. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 4. С. 805—808.
3. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М., 1984.
4. Егоров Ю. В. Лекции по уравнениям с частными производными. М., 1985.
5. Радыно Я. В. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 10. С. 875—878.
6. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
7. Титчмарш Е. Теория функций. М., 1980.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 4 мая 1989 г.

УДК 517.926

А. Д. КУЗЫК, М.Н. ШЕРЕМЕТА

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

1°. Пусть l — положительная непрерывная на $[0, +\infty)$ функция. Целая функция f называется [1] функцией ограниченного l-индекса, если существует $N \in \mathbf{Z}_+$ такое, что для всех $k \in \mathbf{Z}_+$ и $z \in \mathbf{C}$

$$\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!l^m(|z|)} : 0 \leqslant m \leqslant N\right\}. \tag{1}$$

При $l(r) \equiv 1$ отсюда получаем определение целой функции ограниченного индекса. Изучению свойств целых функций ограниченного индекса посвящено много работ (библиографию см. в [2]). Часть этих работ посвящена исследованию ограниченности индекса целой функции f, удовлетворяющей дифференциальному уравнению вида

$$g_0(z)f^{(n)}(z) + g_1(z)f^{(n-1)}(z) + \ldots + g_n(z)f(z) = h(z). \tag{2}$$

Шах [3] показал, что если $g_0, g_1, \ldots, g_n$ и h — многочлены такие, что $\deg g_j \leqslant \deg g_0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, то целая функция f, удовлетворяющая уравнению (2), является функцией ограниченного индекса. В [4] этот результат усилен. Доказано следующее утверждение.

Теорема А [4]. *Пусть $g_0, g_1, \ldots, g_n$ и h — целые функции ограниченного индекса и для любого $R \in (0, +\infty)$ существует $M = M(R) \in (0, +\infty)$ такое, что для всех $z \in \mathbf{C} \setminus \bigcup_k \{z\colon |z - b_k| \leqslant R\}$, где b_k — нули функции g_0, выполняются неравенства $|g_j(z)| \leqslant M|g_0(z)|$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда целая функция f, удовлетворяющая уравнению (2), является функцией ограниченного индекса.*

В настоящей статье теорема А будет распространена на случай целых функций ограниченного l-индекса.

2°. Всюду далее через Q обозначен класс положительных непрерывных на $[0, +\infty)$ функций l таких, что

$$l(x + O(1/l(x))) = O(l(x)) \quad (x \to +\infty). \tag{3}$$

Следующие три леммы приведены в [5], где при определении класса Q дополнительно требовалось, чтобы функция $l\in Q$ была непрерывно дифференцируемая и удовлетворяла условию $l'(x)=O(l^2(x))$ $(x\to+\infty)$. Более детальный анализ показал, что в этих леммах и других результатах из [5] последнее условие излишне.

Лемма 1. *Пусть $l\in Q$. Целая функция f является функцией ограниченного l-индекса тогда и только тогда, когда для любого $R>0$ существуют $\eta=\eta(R)\in(0,R)$ и $P_1=P_1(R)\in[1,+\infty)$ такие, что для любого $z_0\in\mathbf{C}$ и некоторого $r=r(z_0)\in[\eta,R]$ выполняется неравенство*

$$\max\left\{|f(z)|:|z-z_0|=\frac{r}{l(|z_0|)}\right\}\leqslant P_1\min\left\{|f(z)|:|z-z_0|=\frac{r}{l(|z_0|)}\right\}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть $l\in Q$ и $l_*(r)=\theta l(r)$ для всех $r\in[0,+\infty)$, где $\theta\in(0,+\infty)$. Тогда целая функция f ограниченного l-индекса является функцией ограниченного l_*-индекса.*

Лемма 3. *Пусть $l\in Q$. Если целая функция f является функцией ограниченного l-индекса, то для любого $R>0$ существует $\tilde{n}=\tilde{n}(R)\in\mathbf{Z}_+$ такое, что $n(R/l(|z_0|),z_0,1/f)\leqslant\tilde{n}$, где $n(r,z_0,1/f)$ — количество нулей функции f в круге $\{z:|z-z_0|\leqslant r\}$, $z_0\in\mathbf{C}$.*

Кроме этих лемм, нам будут нужны еще два вспомогательных утверждения. Для функции $l\in Q$ положим $l(x)\equiv l(0)$ при $x\leqslant0$ и

$$\lambda(R)=\sup\left\{\frac{1}{l(x)}\,l\left(x+\frac{t}{l(x)}\right):-R\leqslant t\leqslant R,\ x\geqslant0\right\}.$$

Лемма 4. *Пусть $l\in Q$ и $z_0\in\mathbf{C}$. Тогда для всех $z\in\mathbf{C}$ таких, что $|z-z_0|\leqslant R/l(|z_0|)$, $0\leqslant R<+\infty$, выполняются неравенства*

$$l(|z_0|)/\lambda(R\lambda(R))\leqslant l(|z|)\leqslant l(|z_0|)\lambda(R). \tag{5}$$

Доказательство. Так как $l\in Q$, то $1\leqslant\lambda(R)<+\infty$ для всех $R\in[0,+\infty)$. Из неравенства $|z-z_0|\leqslant R/l(|z_0|)$ вытекает, что $|z_0|-R/l(|z_0|)\leqslant|z|\leqslant|z_0|+R/l(|z_0|)$ и, значит, $l(|z|)\leqslant\lambda(R)l(|z_0|)$. Отсюда, в частности, следует, что $|z-z_0|\leqslant R\lambda(R)/l(|z|)$, откуда, как и выше, имеем $l(|z_0|)\leqslant\lambda(R\lambda(R))l(|z|)$.

Для целой функции f с нулями a_k положим

$$G(R,f)=\bigcup_k\left\{z:|z-a_k|\leqslant\frac{R}{l(|a_k|)}\right\},\quad R>0.$$

Лемма 5. *Пусть $l\in Q$. Если целая функция f является функцией ограниченного l-индекса, то для любых $R>0$ и $m\in\mathbf{N}$ существует $P_2=P_2(R,m)\in(0,+\infty)$ такое, что для каждого $z_0\in\mathbf{C}\setminus G(R,f)$ выполняется неравенство*

$$|f^{(m)}(z_0)|\leqslant P_2|f(z_0|l^m(|z_0|). \tag{6}$$

Доказательство. Покажем сначала, что для любого $z_0\in\in\mathbf{C}\setminus G(R,f)$ и всех $k\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$|z_0-a_k|>R/2\lambda(R)l(|z_0|). \tag{7}$$

Действительно, если бы при некоторых $z_0\in\mathbf{C}\setminus G(R,f)$ и $k\in\mathbf{N}$ выполнялось противоположное к (7) неравенство, то по лемме 4 мы бы имели неравенство $l(|a_k|)\leqslant\lambda(R)l(|z_0|)$ и, значит,

$$|z_0-a_k|\leqslant\frac{R}{2\lambda(R)l(|z_0|)}\leqslant\frac{R}{2l(|a_k|)}<\frac{R}{l(|a_k|)}, \tag{8}$$

т. е. $z_0\in G(R,f)$, что невозможно.

Возьмем теперь в лемме 1 $R/2\lambda(R)$ вместо R. Тогда существуют $\eta\in(0,R/2\lambda(R))$ и $P_1\in[1,+\infty)$ такие, что для любого $z_0\in\mathbf{C}$ и некоторого $r=r(z_0)\in[\eta, R/2\lambda(R)]$ выполняется неравенство (4). Для такого r, используя формулу Коши, имеем

$$|f^{(m)}(z_0)|<\frac{m!}{2\pi}\int\limits_{|z-z_0|=r/l(|z_0|)}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{m+1}}|dz|\leqslant$$

$$\leqslant m!\left\{\frac{l(|z_0|)}{r}\right\}^m\max\left\{|f(z)|:|z-z_0|=\frac{r}{l(|z_0|)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant m!l^m(|z_0|)\eta^{-m}P_1\min\left\{|f(z)|:|z-z_0|=\frac{r}{l(|z_0|)}\right\}.$$

Но для любого $z_0\in\mathbf{C}\backslash G(R,f)$ круг $\{z:|z-z_0|\leqslant R/2\lambda(R)l(|z_0|)\}$ в силу (7) не содержит нулей функции f. Поэтому в силу неравенства $r\leqslant R/2\lambda(R)$ имеем $\min\{|f(z)|:|z-z_0|=r/l(|z_0|)\}\leqslant|f(z_0)|$ и, значит, $|f^{(m)}(z_0)|\leqslant m!P_1\eta^{-m}|f(z_0)|l^m(|z_0|)$, т. е. выполнено (6) с $P_2=m!P_1\eta^{-m}$.

3°. Для целых функций ограниченного l-индекса имеет место следующее обобщение теоремы А.

Теорема 1. *Пусть $l\in Q$, а $g_0, g_1, \dots, g_n$ и h — целые функции ограниченного l-индекса. Пусть для любого $R\in(0,+\infty)$ существует $M=M(R)\in(0,+\infty)$ такое, что для всех $z\in\mathbf{C}\backslash G(R,g_0)$ и $j=1,2,\dots,n$ выполняется неравенство*

$$|g_j(z)|\leqslant M|g_0(z)|l^j(|z|). \tag{9}$$

Тогда целая функция f, удовлетворяющая уравнению (2), является функцией ограниченного l-индекса.

Доказательство. Пусть b_k — нули функции g_0, а $\{c_k\}$ — множество всех нулей всех функций $g_0, g_1, \dots, g_n$ и h. Таким образом, $\{b_k\}\subset\{c_k\}$. Положим

$$G(R)=\bigcup_k\{z:|z-c_k|\leqslant R/l(|c_k|)\}.$$

Легко видеть, что $G(R)=\left(\bigcup\limits_{j=0}^{n}G(R,g_j)\right)\cup G(R,h)$, а из леммы 5 и условия (9) вытекает, что для любого $R\in(0,+\infty)$ существует $M^*=M^*(R)\in(0,+\infty)$ такое, что для всех $z\in\mathbf{C}\backslash G(R)$ выполняются неравенства

$$|h'(z)|\leqslant M^*|h(z)|l(|z|),$$
$$|g_j(z)|\leqslant M^*|g_0(z)|l^j(|z|),\ j=1,2,\dots,n,$$
$$|g_j'(z)|\leqslant M^*|g_0(z)|l^{j+1}(|z|),\ j=1,2,\dots,n.$$

Дифференцируя (2), имеем

$$g_0(z)f^{(n+1)}(z)+\sum_{j=1}^{n}g_j(z)f^{(n+1-j)}(z)+\sum_{j=0}^{n}g_j'(z)f^{(n-j)}(z)=h'(z),$$

откуда в силу приведенных выше неравенств следует, что для всех $z\in\mathbf{C}\backslash G(R)$ выполняются соотношения

$$|g_0(z)f^{(n+1)}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant|h'(z)|+\sum_{j=1}^{n}|g_j(z)||f^{(n+1-j)}(z)|+\sum_{j=0}^{n}|g_j'(z)||f^{(n-j)}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant M^*|h(z)|l(|z|)+\sum_{j=1}^{n}|g_j(z)||f^{(n+1-j)}(z)|+\sum_{j=0}^{n}|g_j'(z)||f^{(n-j)}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant M^*l(|z|)\sum_{j=0}^{n}|g_j(z)||f^{(n-j)}(z)|+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}|g_j(z)||f^{(n+1-j)}(z)|+\sum_{j=0}^{n}|g_j'(z)||f^{(n-j)}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant M^*|g_0(z)|\{M^*l(|z|)\sum_{j=0}^{n}l^j(|z|)|f^{(n-j)}(z)|+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}l^j(|z|)|f^{(n+1-j)}(z)|+\sum_{j=0}^{n}l^{j+1}(|z|)|f^{(n-j)}(z)|\}=$$

$$=M^*|g_0(z)|l^{n+1}(|z|)\left\{(M^*+1)\sum_{j=0}^{n}\frac{|f^{(n-j)}(z)|}{l^{n-j}(|z|)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{|f^{(n+1-j)}(z)|}{l^{n+1-j}(|z|)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant M^*\{(M^*+1)(n+1)+n\}|g_0(z)|l^{n+1}(|z|)\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{l^j(|z|)}:0\leqslant j\leqslant n\right\}.$$

Таким образом, для любого $R>0$ существует $P_3=P_3(R)\in(0,+\infty)$ такое, что для всех $z\in\mathbf{C}\setminus G(R)$ выполняется неравенство

$$\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{l^{n+1}(|z|)}\leqslant P_3\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{l^j(|z|)}:0\leqslant j\leqslant n\right\}. \tag{10}$$

Пусть теперь $z_0\in\mathbf{C}$ — произвольная точка, а $K=\{z:|z-z_0|\leqslant\leqslant 1/l(|z_0|)\}$. Так как $g_0, g_1, \dots, g_n$ и h — целые функции ограниченного l-индекса, то по лемме 3 в круге K содержится не более чем $\tilde{n}$ элементов множества $\{c_k\}$, где $\tilde{n}$ не зависит от z_0. Если $c_m\in K$ и

$$K_m^*=\left\{z:|z-c_m|\leqslant\frac{1}{33(\tilde{n}+1)\lambda(\lambda(1))l(|c_m|)}\right\},$$

то в силу леммы 4 $K_m^*\subset K_m$, где

$$K_m=\left\{z:|z-c_m|\leqslant\frac{1}{33(\tilde{n}+1)l(|z_0|)}\right\}.$$

Поэтому если $z\in K\setminus\bigcup_{c_m\in K}K_m$, то выполняется неравенство (10) с $P_3=$ $=P_3\left(\frac{1}{33(\tilde{n}+1)\lambda(\lambda(1))}\right)$. Используя снова неравенства (5), для таких z из (10) имеем

$$\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{l^{n+1}(|z_0|)}\leqslant\lambda^{n+1}(1)\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{l^{n+1}(|z|)}\leqslant$$

$$\leqslant P_3\lambda^{n+1}(1)\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(|z_0|)}\lambda^k(\lambda(1)):0\leqslant k\leqslant n\right\}\leqslant P_4F(z), \tag{11}$$

где $P_4=P_3\lambda^{n+1}(1)\lambda^n(\lambda(1))$ и

$$F(z)=\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(|z_0|)}:0\leqslant k\leqslant n\right\}.$$

Для суммарной длины D диаметров кругов K_m имеет место оценка $D\leqslant 2\tilde{n}/33(\tilde{n}+1)l(|z_0|)$. Поэтому существуют $r_1\in[1/16, 3/16]$ и $r_2\in\in[1/2, 5/8]$ такие, что если $z\in C_1=\{z:|z-z_0|=r_1/l(|z_0|)\}$ или $z\in C_2=\{z:|z-z_0|=r_2/l(|z_0|)\}$, то $z\in K\setminus\bigcup_{c_m\in K}K_m$. На окружностях C_1 и C_2 возьмем произвольные точки $z_1\in C_1$ и $z_2\in C_2$. Соединим эти точки гладкой кривой $\gamma=\{z:z=z(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, которая лежит в $K\setminus\bigcup_{c_m\in K}K_m$ и на которой $F\neq 0$. Ясно, что кривую γ можно выбрать так, что для ее длины имеет место оценка

$$|\gamma|\leqslant\frac{\pi r_1}{l(|z_0|)}+\frac{r_2-r_1}{l(|z_0|)}+\frac{\pi\tilde{n}}{33(\tilde{n}+1)l(|z_0|)}<\frac{\pi}{l(|z_0|)}.$$

Тогда на γ выполняется неравенство (11), т. е.

$$\frac{|f^{(n+1)}(z(t))|}{l^{n+1}(|z_0|)} \leqslant P_4 F(z(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12}$$

Функция $F(z(t))$ непрерывная на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемая, за исключением конечного числа точек. Ясно, что

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) \leqslant \max\left\{\frac{d}{dt} \frac{|f^{(k)}(z(t))|}{l^k(|z_0|)} : 0 \leqslant k \leqslant n\right\}.$$

Так как для комплекснозначной функции φ действительного переменного t имеет место неравенство $\frac{d}{dt} |\varphi(t)| \leqslant \left|\frac{d}{dt} \varphi(t)\right|$, то отсюда в силу (12) следует, что

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k+1)}(z(t))|}{l^{k+1}(|z_0|)} |z'(t)| : 0 \leqslant k \leqslant n\right\} l(|z_0|) \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z(t))|}{l^k(|z_0|)} : 0 \leqslant k \leqslant n;\ \frac{|f^{(n+1)}(z(t))|}{l^{n+1}(|z_0|)}\right\} |z'(t)| l(|z_0|) \leqslant$$

$$\leqslant P_4 F(z(t)) |z'(t)| l(|z_0|).$$

Поэтому

$$\left|\ln \frac{F(z_2)}{F(z_1)}\right| = \left|\int_0^T \frac{1}{F(z(t))} \frac{d}{dt} F(z(t)) dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant P_4 l(|z_0|) \int_0^T |z'(t)| dt \leqslant P_4 l(|z_0|) |\gamma| \leqslant \pi P_4,$$

т. е. $F(z_2) \leqslant F(z_1) \exp\{\pi P_4\}$. Выберем $z_2 \in C_2$ так, чтобы $|f(z_2)| = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r_2/l(|z_0|)\}$. Тогда

$$\max\{|f(z)| : |z - z_0| = 1/2l(|z_0|)\} \leqslant |f(z_2)| \leqslant$$

$$\leqslant F(z_2) \leqslant F(z_1) \exp\{\pi P_4\}. \tag{13}$$

Так как $z_1 \in C_1$, то для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$|f^{(j)}(z_1)| = \frac{j!}{2\pi} \left| \int_{|z - z_1| = 1/16l(|z_0|)} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{j+1}} dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant n! \{16 l(|z_0|)\}^j \max\{|f(z)| : |z - z_0| = 4/16l(|z_0|)\},$$

т. е.

$$F(z_1) \leqslant n! 16^n \max\{|f(z)| : |z - z_0| \leqslant 1/4l(|z_0|)\},$$

и в силу (13) получаем неравенство

$$\max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{2l(|z_0|)}\right\} \leqslant P \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{4l(|z_0|)}\right\},$$

где $P = n! 16^n P_4$. Положим $l_*(r) = 3l(r)$. Тогда из последнего неравенства имеем

$$M\left(\frac{3}{2l_*(|z_0|)}, z_0, f\right) \leqslant PM\left(\frac{3}{4l_*(|z_0|)}, z_0, f\right), \tag{14}$$

где $M(r, z_0, f) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$.

Разложим функцию f в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m, \quad b_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0). \tag{15}$$

Пусть $\mu(r, z_0, f) = \max\{|b_m| r^m : m \geqslant 0\}$ — максимальный член ряда (15), а $\nu(r, z_0, f) = \max\{m : |b_m| r^m = \mu(r, z_0, f)\}$ — его центральный индекс.

Тогда

$$\mu(r, z_0, f) \leqslant M(r, z_0, f) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \left(\frac{4}{3} r\right)^m \left(\frac{3}{4}\right)^m \leqslant 4\mu\left(\frac{4}{3} r, z_0, f\right)$$

и [6, с. 13]

$$\ln \mu\left(\frac{3}{2} r, z_0, f\right) - \ln \mu(r, z_0, f) = \int_r^{3r/2} \frac{\nu(t, z_0, f)}{t} dt \geqslant \nu(r, z_0, f) \ln \frac{3}{2},$$

т. е.

$$\nu(r, z_0, f) \leqslant \frac{1}{\ln(3/2)} \left\{ \ln M\left(\frac{3}{2} r, z_0, f\right) - \ln \frac{1}{4} - \ln M\left(\frac{3}{4} r, z_0, f\right) \right\} =$$

$$= \frac{\ln 4}{\ln(3/2)} + \frac{1}{\ln(3/2)} \left\{ \ln M\left(\frac{3}{2} r, z_0, f\right) - \ln M\left(\frac{3}{4} r, z_0, f\right) \right\}. \tag{16}$$

Пусть $N(z_0)$ — наименьшее из чисел N, для которых выполняется неравенство (1) с $z=z_0$. Тогда ясно, что $N(z_0) \leqslant \nu(1/l(|z_0|), z_0, f)$. Поэтому, взяв $r=1/l_*(|z_0|)$, из (14) и (16) получаем, что

$$N(z_0) \leqslant \frac{\ln 4}{\ln(3/2)} + \frac{\ln P}{\ln(3/2)} = B. \tag{17}$$

Так как B не зависит от z_0, то неравенство (17) имеет место для всех $z_0 \in \mathbf{C}$ и, значит, функция f имеет ограниченный l_*-индекс. Поэтому по лемме 2 эта функция имеет ограниченный l-индекс. Теорема 1 полностью доказана.

4°. Из теоремы 1 в силу леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть целые функции $g_0, g_1, \ldots, g_n$ и h удовлетворяют условиям теоремы 1. Если целая функция f удовлетворяет уравнению (2), то для любого $R \in (0, +\infty)$ существует $\tilde{n}(R) \in \mathbf{Z}_+$ такое, что $n(R/l(|z_0|), z_0, 1/f) \leqslant \tilde{n}(R)$ для всех $z_0 \in \mathbf{C}$.*

Из определения ограниченности l-индекса целой функции видно, что любой многочлен является функцией ограниченного l-индекса, какова бы ни была положительная непрерывная на $[0, +\infty)$ функция l. Этот факт приводит к следующим утверждениям.

Следствие 2. *Пусть $g_0, g_1, \ldots, g_n$ и h — многочлены такие, что $\deg g_j \leqslant \deg g_0 + jp$, $p \in \mathbf{Z}_+$, для всех $j=1, 2, \ldots, n$. Тогда целая функция f, удовлетворяющая уравнению (2), является функцией ограниченного l-индекса с $l(x) = x^p + 1$, $x \in [0, +\infty)$.*

Действительно, в силу неравенства $\deg g_j \leqslant \deg g_0 + jp$ при указанном выборе функции l имеем

$$\frac{|g_j(z)|}{l^j(|z|)\,|g_0(z)|} = O(1) \quad (|z| \to +\infty), \; j=1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Отсюда получаем, что для любого $R \in (0, +\infty)$ существует $M(R) \in (0, +\infty)$ такое, что для всех $z \in \mathbf{C} \setminus G(R, g_0)$ выполняется (9). Поэтому по теореме 1 f — целая функция ограниченного l-индекса.

При $p=0$ из следствия 2 получаем цитируемый в п. 1° результат Шаха [3].

Следствие 3. *Пусть $g_0, g_1, \ldots, g_n$ и h — многочлены такие, что $\deg g_0 \geqslant \deg g_j + j$, $j=1, 2, \ldots, n$. Тогда уравнение (2) не имеет целых трансцендентных решений.*

Действительно, если возьмем l таким, чтобы $l(x) \equiv 1/x$ при $x \geqslant 1$, то получим соотношение (18). Поэтому, как и выше, целое решение уравнения (2) имеет ограниченный l-индекс. В [1] показано, что для того, чтобы для положительной непрерывной на $[0, +\infty)$ функции l, удовлетворяющей условию

$$\lim_{\delta \to +0} \lim_{r \to +\infty} \min\left\{ l(t) : \frac{r}{1+\delta} \leqslant t \leqslant r \right\} \frac{1}{l(r)} = 1,$$

существовала целая трансцендентная функция ограниченного l-индекса, необходимо, чтобы $xl(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$. В нашем случае $xl(x) \equiv 1$ $(x \geqslant 1)$, и поэтому уравнение (2) трансцендентных решений не имеет.

Отметим, что справедливость следствия 3 можно также доказать методом Вимана — Валирона (см., например, [7]).

Теорему 1 и следствие 2 можно применять к исследованию ограниченности l-индекса некоторых суперпозиций целых функций. Так, например, функции $\exp(z^m)$, $\cos(z^m)$ и $\sin(z^m)$, $m \in \mathbf{N}$, по следствию 2 являются функциями ограниченного l-индекса с $l(x) = x^{m-1} + 1$, $x \in [0, +\infty)$, так как первая из них удовлетворяет уравнению $zf'(z) - mz^m f(z) = 0$, а две другие — уравнению $z^2 f''(z) - (m-1) zf'(z) + m^2 z^{2m} f(z) = 0$.

Литература

1. Кузык А. Д., Шеремета М. Н.// Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 1. С. 3—13.
2. Shah S. M.//Lecture Notes in Math. 1977. Vol. 589. P. 117—145.
3. Shah S. M.// J. Math., Mech. 1968. Vol. 18. P. 131—136.
4. Fricke G. H., Shah S. M.// Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and. Appl. 1978. Vol. 2, N 4. P. 423—435.
5. Кузык А. Д., Шеремета М. Н.// Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 6. С. 16—17.
6. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М., 1978. Ч. 2.
7. Стрелиц Ш. И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс, 1972.

Львовский государственный университет им. Ивана Франко

Поступила в редакцию 10 мая 1989 г.

УДК 517.44

Н. Н. ЛЕБЕДЕВ, И. П. СКАЛЬСКАЯ

О РАЗЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В РЯДЫ ПО КВАДРАТАМ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА

Как известно, функция $f(x)$, определенная на промежутке $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям, может быть представлена в виде ряда по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} H_n(y)\, dy, \qquad (1)$$

$$-\infty < x < \infty,$$

где $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ — полином Эрмита порядка n.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что наряду с (1) существует разложение родственного типа, содержащее квадраты полиномов Эрмита. Это представление имеет вид

$$\int_x^{\infty} f(y)\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) (-1)^{n-1} \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} f(y) e^{y^2} [H_{-n-1}^2(iy) - $$

$$- H_{-n-1}^2(-iy)]\, dy, \quad 0 < x < \infty, \qquad (2)$$

где $H_\nu(z)$ — функция Эрмита произвольного порядка ν. Краткий обзор теории полиномов и функций Эрмита приведен в работах [1, 2], где можно найти необходимые сведения, относящиеся к свойствам рассматриваемых функций.

1. Дифференциальное уравнение для квадратов полиномов Эрмита и некоторые свойства его интегралов. Введем следующие обозначения:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} e^{-x^2} H_n^2(x), \qquad (1.1)$$