МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 39, № 1 (1986)

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО l-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

А. Д. Кузык, М. Н. Шеремета

1. Введение. Пусть f — целая функция, а $n\left(R, a, \frac{1}{f-w}\right)$ — количество w-точек (т. е. корней уравнения $f(z) = w$), лежащих в круге $\{z: \ |z-a| < R\}$. А. А. Гольдберг [1] и Хейман [2], независимо друг от друга, показали, что если существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$n\left(1, a, \frac{1}{f-w}\right) \leqslant K$$

для всех $a \in \mathbf{C}$ и $w \in \mathbf{C}$, т. е. f имеет ограниченное распределение значений, то рост функции f не выше нормального типа первого порядка. При доказательстве этого утверждения в [2] использована связь между целыми функциями, имеющими ограниченное распределение значений, и целыми функциями ограниченного индекса. Согласно [3], целая функция f называется функцией ограниченного индекса, если существует число $N \in \mathbf{Z}_+$ такое, что для всех $z \in \mathbf{C}$ и всех $n \in \mathbf{Z}_+$ имеет место неравенство

$$|f^{(n)}(z)|/n! \leqslant \max\{|f^{(k)}(z)|\,k!: \quad 0 \leqslant k \leqslant N\}.$$

Наименьшее из таких чисел N называется индексом функции f. Исследованию свойств целых функций ограниченного распределения значений и ограниченного индекса посвящено много работ (библ. см. в [4]). В частности, в [5] показано, что если целая функция f имеет ограниченный индекс $N(f)$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \ln M(r, f) \leqslant N(f) + 1,$$
$$M(r, f) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}.$$

Пусть l — положительная на $[0, +\infty[$ функция. Естественным является вопрос о росте целой функции f, для которой существует постоянная $K > 0$ такая, что для всех $a \in \mathbf{C}$ и всех $w \in \mathbf{C}$ выполняется неравенство

$$n\left(\frac{1}{l(|a|)}, a, \frac{1}{f-w}\right) \leqslant K.$$

Целую функцию, удовлетворяющую этому условию, назовем функцией ограниченного l-распределения значений. Чтобы изучить рост целых функций ограниченного l-распределения значений, мы обобщим понятие индекса целой функции и изучим рост целых функций с ограниченным обобщенным индексом.

2. О возможности обобщения понятия целой функции ограниченного индекса. В [6] введено так называемое понятие l-индекса как наименьшего из чисел $N \in \mathbf{Z}_+$ таких, что для всех $z \in \mathbf{C}$ и $n \in \mathbf{Z}_+$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n!} l(n+2)|f^{(n)}(z)| \leqslant \\ \leqslant \max\left\{\frac{1}{k!} l(k+2)|f^{(k)}(z)|:\ 0 \leqslant k \leqslant N\right\}, \tag{1}$$

и доказано, что если l — непрерывная на $[0, +\infty[$ положительная медленно растущая к $+\infty$ функция и целая функция f имеет ограниченный l-индекс p, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r l(r)} \leqslant (p+1)\frac{l(p+3)}{l(p+2)}. \tag{2}$$

При этом сделана попытка доказать точность оценки (2). Следующая теорема указывает не только на неточность оценки (2), но и на тот факт, что понятие l-индекса в смысле (1) не представляет особого интереса, так как не выводит за пределы класса целых функций экспоненциального типа.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть l — произвольная положительная на* $[0, +\infty[$ *функция. Если целая трансцендентная функция f имеет ограниченный в смысле определения* (1) *l-индекс, то ее рост не выше нормального типа первого порядка.*

Доказательство. Если f имеет l-индекс $p < < +\infty$, то для всех $z \in \mathbf{C}$ выполняется (1) с $n = p + 1$

и $\dot{N} = p$, откуда

$$\frac{1}{(p+1)!} l(p+3) M_{p+1}(r, f) \leqslant$$
$$\leqslant \max \left\{ \frac{1}{k!} l(k+2) M_k(r, f) \colon 0 \leqslant k \leqslant p \right\}, \tag{3}$$

где $M_k(r, f) = \max \{ |f^{(k)}(z)| \colon |z| = r\}$, $k \geqslant 1$. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\mu(r, f) = \max \{ |a_n| r^n \colon n \geqslant 0\}$ — максимальный член и $\nu(r, f) = \max \{n \colon |a_n| r^n = \mu(r, f)\}$ — центральный индекс степенного разложения функции f. Известно [7, с. 26], что если f — трансцендентная целая функция, то для любого фиксированного $j \in \mathbf{N}$ имеют место неравенства

$$\left(\frac{\nu(r, f)}{r}\right)^j M(r, f)(1 - \varepsilon_j(r)) \leqslant$$
$$\leqslant M_j(r, f) \leqslant \left(\frac{\nu(r, f)}{r}\right)^j M(r, f)(1 + \varepsilon_j(r)), \tag{4}$$

где $\varepsilon_j(r) \geqslant 0$ и $\varepsilon_j(r) \to 0$ при $r \to +\infty$ вне некоторого множества конечной логарифмической меры, зависящей от j. Из (3) и (4) следует, что

$$\frac{l(p+3)}{(p+1)!} \leqslant \max \left\{ \frac{l(k+2)}{k!} \frac{1+\varepsilon_k(r)}{1-\varepsilon_{p+1}(r)} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\frac{\nu(r, f)}{r}\right)^{k-p-1} \colon 0 \leqslant k \leqslant p \right\},$$

т. е. существует постоянная $A > 0$ такая, что для всех $r > 0$ вне некоторого множества E конечной логарифмической меры B выполняется неравенство $\nu(r, f) \leqslant Ar$. Если же $r \in E$, то, положив $r' = \inf \{t \geqslant r \colon t \,\overline{\in}\, E\}$, имеем

$$r'/r = \exp\{\ln r' - \ln r\} \leqslant \exp\{B\}$$

и

$$\nu(r, f) \leqslant \nu(r', f) \leqslant Ar' \leqslant Ae^B r,$$

т. е. $\nu(r, f) = O(r)$ $(r \to +\infty)$. Используя равенство

$$\ln \mu(r, f) = \ln \mu(0, f) + \int_0^r \frac{\nu(t, f)}{t} \mathrm{d}t, \tag{5}$$

получим, что $\ln \mu(r, f) = O(r)$ $(r \to +\infty)$. Но

$$M(r, f) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \{(1+\delta) r\}^n (1+\delta)^{-n} \leqslant$$
$$\leqslant \mu((1+\delta) r, f) \frac{1+\delta}{\delta} \tag{6}$$

для любого фиксированного $\delta > 0$. Поэтому $\ln M(r, f) = O(\ln \mu((1+\delta)r, f)) = O(r)$ $(r \to +\infty)$. Теорема доказана.

Чтобы выйти за пределы класса целых функций экспоненциального типа, дадим следующее обобщение понятия целой функции ограниченного индекса.

Пусть $(l_n(r))_{n=0}^{\infty}$ — последовательность непрерывных на $[0, +[$ положительных на $]0, +\infty[$ функций. Если существует число $N \in \mathbf{Z}_+$ такое, что для всех $z \in \mathbf{C}$ и $n \in \mathbf{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\, l_n(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!\, l_k(|z|)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}, \tag{7}$$

то целую функцию f будем называть функцией ограниченного индекса относительно последовательности (l_n). Наименьшее из чисел $N \in \mathbf{Z}_+$, для которых (7) выполняется, обозначим через $N(f; (l_n))$ и назовем индексом функции f относительно последовательности (l_n). Если $l_n(r) \equiv l^n(r)$, где l — непрерывная на $[0, +\infty[$ положительная на $]0, +\infty[$ функция, и целая функция f имеет ограниченный индекс относительно (l_n), то будем называть функцию f функцией ограниченного l-индекса. При этом число $N(f; l) = N(f; (l_n))$ назовем l-индексом функции f. Отметим, что если $l(r) \equiv 1$, т. е. $l_n(r) \equiv 1$, то $N(f; (l_n)) = N(f; l) = N(f)$.

3. Рост целых функций ограниченного индекса относительно последовательности. Пусть l — положительная на $]0, +\infty[$ непрерывная на $[0, +\infty[$ функция. Скажем, что $l \in L^{\wedge}$, если

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{l(r)} \min\left\{l(t): \frac{r}{1+\delta} \leqslant t \leqslant r\right\} = \lambda(\delta) \to 1 \quad (0 < \delta \to 0). \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть f — целая трансцендентная функция, $l \in L^{\wedge}$ и (l_n) — последовательность положительных на $]0, +\infty[$ непрерывных на $[0, +\infty[$ функций. Если $l_n(r) \sim l^n(r)$ $(r \to +\infty)$ и $N(f; (l_n)) < +\infty$, то*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\nu(r, f)}{r l(r)} \leqslant N(f; (l_n)) + 1. \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (9) через τ. Если $\tau = 0$, неравенство (9) очевидно. Если же $\tau > 0$, то для любого $\delta \in\,]0, \tau[$ существует возрастающая к $+\infty$ последовательность (r_n) положительных чисел такая, что $(1+\delta)\,r_n < r_{n+1}$ и $\nu(r_n, f) > (\tau-\delta)\,r_n l(r_n)$. При $r_n \leqslant r \leqslant (1+\delta)\,r_n$ и $n \geqslant n_0(\delta)$ в силу (8) имеем

$$\nu(r,f) \geqslant \nu(r_n, f) \geqslant (\tau-\delta)\,r_n l(r_n) \geqslant \frac{\tau-\delta}{1+\delta}\,r\,\cdot$$
$$\cdot\,\min\left\{l(t)\colon \frac{r}{1+\delta} \leqslant t \leqslant r\right\} \geqslant \frac{(\tau-\delta)(\lambda(\delta)-\delta)}{1+\delta}\,rl(r). \qquad (10)$$

Положим $E_\delta = \bigcup_{n=n_0(\delta)}^{\infty} [r_n, (1+\delta)\,r_n]$. Ясно, что логарифмическая мера множества E_δ бесконечна и для всех $r \in E_\delta$ выполняется (10). Отсюда и из (4) вытекает существование возрастающей к $+\infty$ последовательности (r_k^*) положительных чисел такой, что $M_j(r_k^*, f)/M(r_k^*, f) \sim (\nu(r_k^*, f)/r_k^*)^j$ $(k\to\infty)$ и выполняется (10) с $r = r_k^*$. Поэтому

$$\frac{M_{j+1}(r_k^*, f)}{M_j(r_k^*, f)} > (1-\delta)\,\frac{\nu(r_k^*, f)}{r_k} >$$
$$> \frac{(\tau-\delta)(1-\delta)(\lambda(\delta)-\delta)}{1+\delta}\,l(r_k^*) \qquad (11)$$

для всех $j = 0, 1, \ldots, N(f;(l_n))$ и всех $k \geqslant k_1(\delta)$. Так как $l_n(r) \sim l^n(r)$ $(r\to+\infty)$, то для всех $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N(f;(l_n))+1$ и всех $k \geqslant k_2(\delta)$ имеем

$$l(r_k^*)/l_j(r_k^*) > (1-\delta)/l_{j-1}(r_k^*). \qquad (12)$$

Положим $\tau_0(\delta) = \frac{1}{1+\delta}(\tau-\delta)(1-\delta)^2(\lambda(\delta)-\delta)$ и допустим, что $\tau_0(\delta) > N(f;(l_n))+1$. Тогда из (11) и (12) получим, что для всех $j = 0, 1, \ldots, N(f;(l_n))$ и всех $k \geqslant \max\{k_1(\delta), k_2(\delta)\}$ имеет место неравенство

$$\frac{M_{j+1}(r_k^*, f)}{(j+1)!\,l_{j+1}(r_k^*)} > \frac{(\tau-\delta)(1-\delta)(\lambda(\delta)-\delta)}{1+\delta}\,\frac{M_j(r_k^*, f)}{(j+1)!}\,\cdot$$
$$\cdot\,\frac{l(r_k^*)}{l_{j+1}(r_k^*)} > \frac{\tau_0(\delta)}{j+1}\,\frac{M_j(r_k^*)}{j!\,l_j(r_k^*)} > \frac{M_j(r_k^*)}{j!\,l_j(r_k^*)},$$

т. е.

$$\frac{M_{N+1}(r_k^*, f)}{(N+1)!\,l_{N+1}(r_k^*)} >$$
$$> \max\left\{\frac{M_j(r_k^*, f)}{j!\,l_j(r_k^*)}\colon 0 \leqslant j \leqslant N\right\}, \qquad N = N(f;(l_n)),$$

что невозможно в силу (7) с $N = N(f; (l_n))$. Таким образом, $\tau_0(\delta) \leqslant N(f; (l_n)) + 1$ и в силу произвольности δ и условия $l \in L^\wedge$ имеем неравенство $\tau \leqslant N(f; (l_n)) + 1$, что и требовалось доказать.

Отметим, что если $l(r) \equiv \text{const}$, $l(r) = r^\alpha$, или l — невозрастающая функция, то $l \in L^\wedge$.

Из теоремы 2 вытекает, что для того, чтобы для данной функции $l \in L^\wedge$ существовала целая трансцендентная функция f ограниченного l-индекса, необходимо, чтобы $rl(r) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$. В этой связи следует заметить, что любой многочлен является функцией ограниченного l-индекса, какова бы ни была положительная функция l.

Положим

$$L(r) = \int_0^r l(t)\,\mathrm{d}t.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln M(r, f)}{L(r)} \leqslant N(f; (l_n)) + 1. \tag{13}$$

Доказательство. Используя неравенство (6) и равенство (5), из (9) получаем, что для любого $\delta > 0$ имеют место неравенства

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln M(r, f)}{L(r)} \leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln \mu((1+\delta)r, f)}{L(r)} \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln \mu((1+\delta)r, f)}{L((1+\delta)r)} \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{L((1+\delta)r)}{L(r)} \leqslant$$
$$\leqslant (N(f; (l_n)) + 1) \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{L((1+\delta)r)}{L(r)}. \tag{14}$$

Применяя правило Лопиталя, в силу определения класса $L^\wedge$ имеем

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{L((1+\delta)r)}{L(r)} \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{(1+\delta)L'((1+\delta)r)}{L'(r)} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{(1+\delta)l((1+\delta)r)}{l(r)} =$$
$$= (1+\delta) \lim_{r\to+\infty} l(r)/l\left(\frac{r}{1+\delta}\right) \leqslant \frac{1+\delta}{1(\delta)} \to 1 \qquad (\delta \to 0),$$

и из (14) получаем (13).

Отметим, что оценку (13), вообще говоря, улучшить нельзя. Действительно, пусть $f(z) = \exp\{z^2\}$. Тогда

$f^{(n)}(z) = f(z)\, l_n(z)$, где $l_n(z) = (2z)^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_0^{(n)}$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами. Положим $l(r) = 2r$. Ясно, что $l \in L^{\wedge}$, $l_n(r) \sim$ $\sim l^n(r)$ $(r \to +\infty)$ и $|f^{(n)}(z)| \leqslant n! l_n(|z|)\,|f(z)|$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathbf{C}$, т. е. $N(f, (l_n)) = 0$. Так как $L(r) =$ $= r^2$ и $\ln M(r, f) = r^2$, то неравенство (13) для функции $\exp\{z^2\}$ превращается в равенство.

Условие $l \in L^{\wedge}$ означает, что функция l не может расти достаточно быстро. Например, функция $l(r) =$ $= e^r$ классу $L^{\wedge}$ не принадлежит. Наличие условия $l \in L^{\wedge}$ в теореме 3 вызвано методикой доказательства. От него можно избавиться, если наложить дополнительные условия на гладкость функций l_n.

Для непрерывной на $[0, +\infty[$ функции h положим $V(t, h) = \sum_{x_k + \delta_k \leqslant t} (h(x_k) - h(x_k + \delta_k))$, где $(]x_k, x_k +$ $+ \delta_k[)$ — последовательность интервалов, на которых функция h убывает, $x_k + \delta_k < x_{k+1}$. Ясно, что $V(t, h) \equiv 0$, если h — неубывающая функция, и $V(t; h) = h(0) - h(t)$, если h — невозрастающая функция.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть l — положительная на $[0, +\infty[$ непрерывная функция, а $(l_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных на $[0, +\infty[$ непрерывно дифференцируемых функций таких, что $V(r, \ln l_n) = o(L(r))$ и $l_n(r) \sim$ $\sim l^n(r)$ при $r \to +\infty$. Тогда, если целая функция f имеет ограниченный индекс $N(f; (l_n))$, то имеет место неравенство* (13).

Доказательство. Положим $N(f; (l_n)) = N$ и при фиксированном $\theta \in [0, 2\pi[$ рассмотрим функцию

$$g(t) = \max\left\{\frac{|f^{(k)}(te^{i\theta})|}{k!\, l_k(t)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}, \qquad t \geqslant 0.$$

Функция g непрерывна на $[0, +\infty[$ и непрерывно дифференцируемая, за исключением счетного множества точек. Ясно, что

$$g'(t) \leqslant \max\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{|f^{(k)}(te^{i\theta})|}{k!\, l_k(t)}\right) : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}.$$

Так как $\frac{d}{dt}|\varphi(t)| \leqslant \left|\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|$ для комплекснозначной функции φ действительного переменного t, то отсюда имеём

$$g'(t) \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k-1)}(te^{i\theta})|}{k!\, l_k(t)} - \frac{|f^{(k)}(te^{i\theta})|}{k!\, l_k(t)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{l_k'(t)}{l_k(t)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\} = \max\left\{\frac{|f^{(k+1)}(te^{i\theta})|}{(k+1)!\, l_{k+1}(t)} \frac{(k+1)\, l_{k+1}(t)}{l_k(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{|f^{(k)}(te^{i\theta})|}{k!\, l_k(t)} \frac{l_k'(t)}{l_k(t)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k+1)}(te^{i\theta})|}{(k+1)!\, l_{k+1}(t)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\} \cdot$$

$$\cdot \max\left\{\frac{(k+1)\, l_{k+1}(t)}{l_k(t)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\} +$$

$$+ \max\left\{\frac{|f^{(k)}(te^{i\theta})|}{k!\, l_k(t)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\} \cdot$$

$$\cdot \max\left\{-\frac{l_n'(t)}{l_k(t)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \qquad (15)$$

В силу (7) $|f^{N+1}(te^{i\theta})| \leqslant (N+1)!\, l_{N+1}(t)\, g(t)$. Поэтому

$$\max\left\{\frac{|f^{(k+1)}(te^{i\theta})|}{(k+1)!\, l_{k+1}(t)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{g(t), \frac{|f^{(N+1)}(te^{i\theta})|}{(N+1)!\, l_{N+1}(t)}\right\} \leqslant g(t),$$

и из (15) получаем неравенство

$$g'(t) \leqslant g(t)\, \{(N+1)\, \alpha(t) + \beta(t)\} \qquad (16)$$

для всех $t \geqslant 0$, кроме счетного множества точек. Здесь $\alpha(t) = \max\{l_{k+1}(t)/l_k(t): 0 \leqslant k \leqslant N\}$ и $\beta(t) = \max\{-l_k'(t)/l_k(t): 0 \leqslant k \leqslant N\}$. Рассмотрим функцию $G(t) = g(t) \exp\left\{-\int_0^t ((N+1)\, \alpha(t) + \beta(t))\, dt\right\}$. В силу (16) G невозрастающая, $G(t) \leqslant G(0) = g(0)$. Таким образом,

$$g(t) \leqslant g(0) \exp\left\{\int_0^t ((N+1)\, \alpha(t) + \beta(t))\, dt\right\}. \qquad (17)$$

Так как $l_{k+1}(t) \sim l(t)\, l_k(t)$ $(t \to +\infty)$, то

$$\int_0^t \alpha(t)\, dt \sim L(t) \qquad (t \to +\infty).$$

Далее, обозначив через $]\, t_\nu^{(k)}, t_\nu^{(k)} + \delta_\nu^{(k)}\, [$ интервалы, где $l_k'(t) < 0$, имеем:

$$\int_0^t \beta(t)\,dt \leqslant \int_0^t \max\left\{\left(-\frac{l_k'(t)}{l_k(t)}\right)^+ :\right.$$

$$\left. : 0 \leqslant k \leqslant N\right\} dt \leqslant \sum_{k=0}^N \int_0^t \left(-\frac{l_k'(t)}{l_k(t)}\right)^+ dt =$$

$$= \sum_{k=0}^N \sum_{t_\nu^{(k)}+\delta_\nu^{(k)} \leqslant t} \int_{t_\nu^{(k)}}^{t_\nu^{(k)}+\delta_\nu^{(n)}} \left(-\frac{l_k'(t)}{l_k(t)}\right) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^N V(t, \ln l_k) = o(L(t))$$

при $t \to +\infty$. Поэтому из (17) получаем, что $|f(te^{i\theta})| \leqslant \leqslant g(t) \leqslant g(0) \exp\{(N+1)L(t)(1+o(1))\}$ $(t \to +\infty)$ для любого $\theta \in [0, 2\pi[$. Отсюда вытекает неравенство (13).

Отметим, что и в случае выполнения условий теоремы 4 оценку (13) улучшить нельзя, на что указывает функция $f(z) = \exp\{e^z\}$. Для этой функции $f^{(n)}(z) = f(z)\, l_n(z)$, где $l_n(z) = e^{nz} + b_{n-1}^{(n)} e^{(n-1)z} + \ldots + b_0^{(n)} e^z$ — экспоненциальный многочлен с положительными коэффициентами. Все функции $l_n(r)$ непрерывно дифференцируемые, положительные и возрастающие на $[0, +\infty[$ и, следовательно, $V(r, \ln l_n) \equiv 0$. Если положим $l(r) = e^r$, то $l \in L^\wedge$, но $l_n(r) \sim l^n(r)$ $(r \to +\infty)$. Ясно, что $|f^{(n)}(z)| \leqslant n!\, l_n(|z|)\, |f(z)|$ для всех $z \in \mathbf{C}$ и $n \in \mathbf{N}$, так что $N(f; (l_n)) = 0$. С другой стороны, $L(r) = e^r - 1$, $\ln M(r, f) = e^r$, т. е. оценка (13) неулучшаемая.

4. Рост целых функций ограниченного l-распределения значений. Пусть целая функция f имеет ограниченное l-распределение значений, т. е. существует число $p \in \mathbf{N}$, такое, что для всех $a \in \mathbf{C}$ и $w \in \mathbf{C}$ выполняется неравенство $n\left(\frac{1}{l(|a|)}, a, \frac{1}{f-w}\right) \leqslant p$. Это значит, что в любом круге $\left\{z\colon |z-a| < \frac{1}{l(|a|)}\right\}$ функция f p-листна. Нам понадобится следующий результат из [2].

ЛЕММА 1. *Пусть функция f аналитична и p-листна в круге $\{z\colon |z-z_0| < R$, $0 < R < +\infty$. Тогда для любого $n > p$*

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} R^n \leqslant \left(\frac{An}{p}\right)^{2p} \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} R^k\colon 1 \leqslant k \leqslant p\right\}, \quad (18)$$

$$A \equiv \mathrm{const}.$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть l — положительная на $[0, +\infty[$ непрерывно дифференцируемая функция такая, что $V(r, \ln l) = O(L(r))$ $(r \to +\infty)$. Если целая функция f имеет ограниченное l-распределение значений, то*

$$\ln M(r, f) = O(L(r)) \quad (r \to +\infty). \tag{19}$$

Доказательство. Положим в (18) $R = \frac{1}{l(|a|)}$, $z_0 = a$ и обозначим $l_*(r) = ql(r)$, $q > 1$. Тогда

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!\, l_*^n(|a|)} q^n \leqslant \left(\frac{An}{p}\right)^{2p} \max\left\{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!\, l_*^k(|a|)} q^k:\ 1 \leqslant k \leqslant p\right\}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!\, l_*^n(|a|)} \leqslant \left(\frac{An}{p}\right)^{2p} q^{p-n} \max\left\{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!\, l_*^k(|a|)}:\ 1 \leqslant k \leqslant p\right\}. \tag{20}$$

Выберем $n_0 \geqslant p$ так, чтобы $(An/p)^{2p} q^{p-n} \leqslant 1$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда из (20) при $n \geqslant n_0$ имеем $\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!\, l_*^n(|a|)} \leqslant$

$$\leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!\, l_*^k(|a|)}:\ 1 \leqslant k \leqslant p\right\} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!\, l_*^k(|a|)}:\ 0 \leqslant\right.$$

$\left.\leqslant k \leqslant n_0\right\}$, т. е. f имеет l_*-индекс $N(f;\ l_*) \leqslant n_0$. $l_*(r) = ql(r)$, по теореме 4 из (13) получаем (19). Теорема 5 доказана.

Из доказательства теоремы 5 видно, что ее утверждение остается в силе, если $l \in L^\wedge$. Отметим, что $O(L(r))$ в (19) нельзя, вообще говоря, заменить на $o(L(r))$. Действительно, пусть $f(z) = \exp\{z^2\}$ и $l(r) = r + 1$, а $w = |w| e^{i\omega} \neq 0$. Тогда для w-точек w_k функции f имеем

$$|w_k| = \sqrt{\ln^2|w| + (\omega + 2k\pi)^2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Если $|a| \leqslant (\sqrt{5} - 1)/2$, то

$$n\left(\frac{1}{l(|a|)}, a, \frac{1}{f - w}\right) \leqslant n\left(\frac{4}{\sqrt{5}+1}, 0, \frac{1}{f-w}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{\pi(\sqrt{5}+1)} + 2 < 3.$$

Если же $a > (\sqrt{5} - 1)/2$, то $|a| > 1/l(|a|)\}$, и количество точек w_k, находящихся в круге $\{z\colon |z - a| < 1/l(|a|)\}$, не превышает числа тех $|w_k|$, для которых $||a| - |w_k|| < 1/l(|a|)$, т. е. числа q тех чисел $k \in \mathbf{Z}$, которые удовлетворяют неравенству

$$(|a| - 1/l(|a|))^2 < \ln^2|w| + (\omega + 2\pi k)^2 <$$
$$< (|a| + 1/l(|a|))^2.$$

Если теперь $|\ln|w|| \geqslant |a| + 1/l(|a|)$, то $q = 0$. Если же

$$|a| - 1/l(|a|) < |\ln|w|| < |a| + 1/l(|a|),$$

то $q \leqslant q_1$, где q_1 — число тех $k \in \mathbf{Z}$, для которых

$$|\omega + 2k\pi| < \sqrt{(|a| + 1/l(|a|))^2 - (|a| - 1/l(|a|))^2} = 2\sqrt{|a|/l(|a|)}.$$

Так как $\sqrt{|a|/l(|a|)} < 1$, то $q \leqslant q_1 \leqslant 3$. Наконец, если $|\ln|w|| \leqslant |a| - 1/l(|a|)$, то $q \leqslant q_2$, где q_2 — число тех $k \in \mathbf{Z}$, для которых

$$\sqrt{(|a| - 1/l(|a|))^2 - \ln^2|w|} < |\omega + 2k\pi| < \sqrt{(|a| + 1/l(|a|))^2 - \ln^2|w|}.$$

Как и выше, нетрудно показать, что $q_2 \leqslant 3$. Таким образом, для всех $a \in \mathbf{C}$ и $w \in \mathbf{C}$ имеет место неравенство

$$n(1/l(|a|),\ a,\ 1/(f - w)) \leqslant 3,$$

т. е. функция $\exp\{z^2\}$ имеет l-ограниченное распределение значений, $l(r) = r + 1$. Ясно, что для этой функции $\ln M(r, f) = r^2 \sim 2L(r) \quad (r \to +\infty)$.

Львовский государственный
университет им. И. Франко

Поступило
21.01.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гольдберг А. А. Об одной задаче П. Турана.— Изв. АН УзбССР, 1974, № 3, с. 19—23.
[2] Hayman W. K. Diffential inequalities and local valency.— Pacific J. Math., 1973, v. 44, № 1, p. 117—137.
[3] Lepson B. Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index.— Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, 1968, v. 11, p. 298—307.
[4] Shah S. M. Entire functions of bounded index.— Lecture Notes in Math., 1977, v. 589, p. 117—145.
[5] Shah S. M. Entire functions of bounded index.— Proc. Amer. Math. Soc., 1968, v. 19, p. 1017—1022.
[6] Lakshminarasimhan T. A note on entire functions of bounde index.— J. Indian Math. Soc., 1974, v. 38, p. 43—49.
[7] Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Гостехиздат, 1961.