МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ

# МАТЕРІАЛИ ДЕСЯТОЇ
# МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
# СТУДЕНТІВ ТА МОЛОДИХ ВЧЕНИХ

" Сучасні інформаційні технології "

" Modern Information Technology "

ICS

ODESSA

ONPU

1918-2018

років

ОДЕСА
2020

УДК 519.83

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГРИ ВИДУ SNAKES AND LADDERS

Бартко М.А.
викладач каф. УПІТтаТ Хлевной О.В.
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, УКРАЇНА

**АНОТАЦІЯ.** У роботі виконано математичне моделювання гри з рушієм на кубику та визначено вплив її статистичних характеристик на середню тривалість гри

Ігри з рушієм на гральному кубику є простими і не потребують від гравця жодних вмінь. Це робить їх дуже зручними для використання в педагогічних цілях при роботі з дітьми дошкільного і молодшого шкільного віку. Станом на зараз існує велика кількість подібних комп'ютерних ігор як розважального, так і педагогічного спрямування.

Найпоширенішою з них є гра типу Snakes And Ladders [1]. Основними статистичними характеристиками ігор такого виду є: загальна кількість ігрових полів на, кількість «змій» і «драбин», середнє значення кількості ходів, необхідних для досягнення поля «Фініш». Останнє значення дає можливість оцінити приблизну тривалість гри. Відомо, що дітям молодшого шкільного віку досить важко концентрувати увагу на певному виді діяльності протягом тривалого часу, тому важливо, щоб середня тривалість однієї гри не перевищувала 20 хвилин.

Тому при створенні сценаріїв подібних ігор дуже важливо розуміти, як впливає зміна тих чи інших статистичних характеристик на тривалість гри. Для цього необхідно створити математичну модель гри. Створимо таку математичну модель за допомогою теорії ланцюгів Маркова [2]. Матрицею ймовірностей ланцюга Маркова із $n$ елементів є матриця виду $n$х$n$, де значення рядка $i$ і колонки $j$ – ймовірність, що гравець із позиції $i$ потрапить на позицію $j$.

Теорія Маркова дає можливість підрахувати тривалість гри наступним чином. Розглянемо гру, у якій кількість ігрових полів дорівнює $n$, а кількість ходів гравця визначається кубиком із кількістю граней рівною $m$. Цю гру ми змоделюємо за допомогою ланцюга Маркова.

Спочатку розглянемо випадок гри без «змій» чи «драбин». В цьому випадку ланцюг Маркова складатиметься із $n$+1 елементів, а його матриця ймовірностей матиме розмір ($n$+1)х($n$+1) і складатиметься із рядків виду

$$\left(0, \ldots, 0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, \ldots, 0\right) \tag{1}$$

із $m$ послідовних $\frac{1}{m}$ (за винятком останніх кількох рядків, де слід згадати правило про необхідність точного потрапляння на останнє поле). Введемо матрицю $M$, отриману після видалення останніх рядку і колонки матриці ймовірностей, неважко пересвідчитися, що $(I - M)^{-1} = (s_{ij})$, де

$$s_{jj} = 1 \text{ для } 0 < j < n - m; \; s_{jj} = \frac{m}{n - j} \text{ для } n - m \le j < n$$
$$s_{jk} = \frac{1}{m} \sum_{i=k-m}^{k-1} s_{ji} \text{ для } j < k \le n - m \tag{2}$$
$$s_{ji} = 0 \text{ для } i < j$$
$$s_{jk} = \frac{1}{n - k} \sum_{i=k-m}^{k-1} s_{ji} \text{ для } n - m < k < n$$

Тепер додамо «змії» і «драбини». Кожна з них, що сполучає поля $i$ та $j$ змінює рядок $i$ матриці ймовірностей до такого вигляду:

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

де 1 – значення у колонці $j$. Матриця ймовірностей зберігає вимірність ($n$+1)х($n$+1), а, відповідно матриця М, отримана видаленням останніх рядків і стовпців – $n$х$n$.

Змінивши таким чином рядок $i$, ми отримали модель гри, де один хід дозволяє зайняти положення на початку «змії» чи «драбини», а інший – відповідно, на їх кінцях. Отже, якщо ми маємо множину змій і драбин, визначених множиною $J$, тривалість гри становитиме

$$\sum_{l \in J} s_{0l}, \tag{3}$$

де $(s_{ij}) = (I - M)^{-1}$

Тепер приймемо, що ми представимо гру вищезгаданою матрицею $M$. Нехай $S = I - M$ і $(s_{kl}) = S^{-1}$. Припустимо, що ми знаємо всі позиції «змій» і «драбин» $(s_{kl})$. Яким буде ефект від додавання нової «змії»/«драбини» з позиції $i$ до позиції $j$? Щоб отримати відповідь на це запитання, приймемо, що матриця $\dot{M}$ – це матриця ймовірностей (без останніх рядка і стовпця) нової гри (після додавання «змії» або «драбини»). Нам потрібно підрахувати $\dot{S}^{-1} = (\dot{s}_{kl})$, де $\dot{S} = I - \dot{M}$. Приймемо матрицю $E$, що дорівнює $E = \dot{S} \cdot S^{-1}$. Звідси $ES = \dot{S}$.

Оскільки матриці $S$ і $\dot{S}$ відрізняються лише $i$-тим рядком, $E$ – матриця, що визначає $i$-тий рядок: $e_{kl} = \delta_{kl}$ причому $k \neq i$. $\delta_{kl}$ – символ Кронекера, який дорівнює 1 ($k = l$) або 0 ($k \neq l$). $i$-тий рядок матриці $E$ дорівнює $i$-тому рядку матриці $\dot{S}$, помноженому на матрицю $S^{-1}$. $i$-тий рядок матриці $\dot{S} = I - \dot{M}$ дорівнює

$$(0, \ldots, \overbrace{1}^{i}, 0, \ldots, 0, \overbrace{-1}^{j}, 0, \ldots, 0)$$

$$(0, \ldots, \overbrace{-1}^{j}, 0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i}\ 0, \ldots, 0), \tag{4}$$

в залежності чи $i < j$ , чи $i > j$. Якщо ми помножимо ці цей ряд на l-тий стовпчик матриці $S^{-1}$

$$\begin{bmatrix} s_{1l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{nl} \end{bmatrix}$$

і отримаємо $e_{il} = s_{il} - s_{jl}$.

Оскільки $\dot{S}^{-1} = S^{-1} \cdot E^{-1}$, то, щоб отримати $\dot{S}^{-1}$, необхідно спочатку обчислити $E^{-1}$. Матриця $E$ є матрицею виду $n$x$n$, у якій $i$-тий рядок замінено на $e_{il} = s_{il} - s_{jl}$. Обчислимо матрицю $E^{-1}$ методом виключення Гаусса. В кожному стовпці, за винятком стовпця $i$, використаємо рядкову операцію $R_i - e_{il}R_l$.

Щоб завершити виключення поділимо рядок $i$ на $e_{ii}$. Отримаємо $E^{-1} = (f_{ij})$, де

$$f_{ik} = \delta_{kl}, \text{ для } k \neq i$$

$$f_{il} = -\frac{e_{il}}{e_{ii}} = -\frac{s_{il} - s_{jl}}{s_{ii} - s_{ji}} \text{ для } l \neq i \tag{5}$$

$$f_{ii} = \frac{1}{e_{ii}} = \frac{1}{s_{ii} - s_{ji}}.$$

Зауважимо, що $\det E = e_{ii} = s_{ii} - s_{ji} \neq 0$, оскільки матриця $E$ має обернену. Зрештою, ми обчислюємо $\dot{S}^{-1} = S^{-1} \cdot E^{-1}$. Нехай $\dot{S}^{-1} = (\dot{s}_{kl})$. Тоді, для двох випадків отримуємо наступну відповідь:

$$\dot{s}_{kl} = \begin{cases} s_{kl} + s_{ki}\left(\dfrac{s_{jl} - s_{il}}{s_{ii} - s_{ji}}\right) \text{ для } l \neq i \\ \dfrac{s_{ki}}{s_{ii} - s_{ji}} \text{ для } l = i \end{cases} \tag{6}$$

За залежністю (6) можна швидко вирахувати, який вплив на тривалість гри матиме введення додаткової «драбини» або «змії», а, отже, і підрахувати середню тривалість гри.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1.http://www.game-game.com.ua/uk/134984.

2.How Long Is a Game of Snakes and Ladders? S. C. Althoen, L. King and K. Schilling, The Mathematical Gazette, Vol. 77, No. 478 (Mar., 1993), pp. 71-76.