

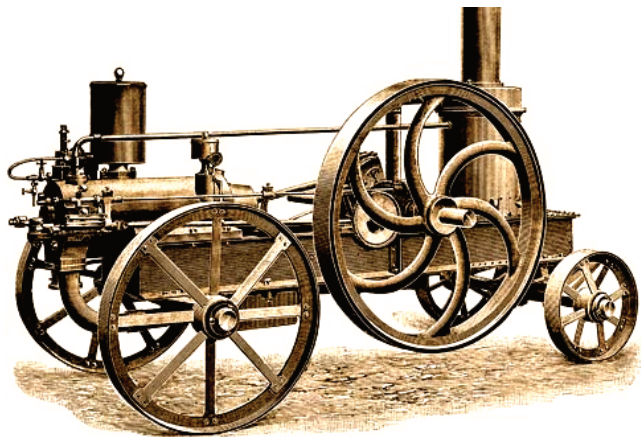
**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

Національний університет «Запорізька політехніка»

**П. К. Штанько, В. Г. Шевченко, О. С. Омельченко,  
Л. Ф. Дзюба, В. Р. Пасіка, О. М. Поляков**

# **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**За редакцією П. К. Штанька**



**Запоріжжя  
СТАТУС  
2021**

**ББК 22.2я73**  
**УДК 531 (075.8)**  
**T33**

**T33**      **Теоретична механіка** : навчальний посібник /  
П. К. Штанько, В. Г. Шевченко, О. С. Омельченко,  
Л. Ф. Дзюба, В. Р. Пасіка, О. М. Поляков ; за ред.  
П. К. Штанька. — Запоріжжя : НУ «Запорізька  
політехніка», 2021. — 464 с.  
**ISBN 978-617-7759-77-4**

**Рецензент: Е. М. Гуліда**, доктор технічних наук, професор  
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Рекомендовано до видання Вченою радою НУ «Запорізька  
політехніка», протокол № 6/21 від 28 січня 2021 р.

© П. К. Штанько            2021  
© В. Г. Шевченко         2021  
© О. С. Омельченко      2021  
© Л. Ф. Дзюба            2021  
© В. Р. Пасіка            2021  
© О. М. Поляков         2021

## ЗМІСТ

Передмова . . . . .	11
Розділ 1. Статика. . . . .	14
Глава 1. Загальні поняття статички . . . . .	14
1.1. Предмет статички . . . . .	14
1.2. Сила . . . . .	14
1.3. Аксиоми статички . . . . .	16
1.4. Механічні в'язі та їх реакції . . . . .	19
1.5. Задачі статички . . . . .	26
Контрольні запитання . . . . .	26
Глава 2. Система збіжних сил . . . . .	28
2.1. Рівнодійна системи збіжних сил . . . . .	28
2.2. Проекція сили на вісь і площину . . . . .	30
2.3. Аналітичний спосіб визначення рівнодійної . . . . .	31
2.4. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил . . . . .	32
2.5. Теорема про три непаралельні сили . . . . .	32
2.6. Аналітичні умови рівноваги . . . . .	33
2.7. Статично визначувані і статично невизначувані задачі . . . . .	34
2.8. Методика та приклади розв'язування задач статички . . . . .	34
Контрольні запитання . . . . .	38
Глава 3. Моменти сил . . . . .	39
3.1. Момент сили відносно центра (точки) . . . . .	39
3.2. Теорема Варіньона для системи збіжних сил . . . . .	41
3.3. Рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил . . . . .	44
3.4. Момент сили відносно осі . . . . .	45
3.5. Залежність між моментом сили відносно точки і осі, що проходить через цю точку . . . . .	46
3.6. Момент сили відносно координатних осей . . . . .	47
Контрольні запитання . . . . .	49
Глава 4. Теорія пар сил . . . . .	50
4.1. Додавання двох паралельних сил . . . . .	50
4.2. Пара сил . . . . .	53
4.3. Момент пари сил . . . . .	54

4.4. Еквівалентність пар сил . . . . .	55
4.5. Додавання пар сил . . . . .	57
4.6. Умови рівноваги пар сил . . . . .	60
Контрольні запитання . . . . .	61
Глава 5. Зведення довільної системи сил до заданого центра .	63
5.1. Лема про паралельне перенесення сили . . . . .	63
5.2. Зведення довільної системи сил. Головний вектор і головний момент системи . . . . .	64
5.3. Векторні умови рівноваги довільної системи сил . . . . .	65
5.4. Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту довільної просторової системи сил . . . . .	67
5.5. Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил . . . . .	68
5.6. Аналітичні умови рівноваги просторової системи паралельних сил . . . . .	70
5.7. Інваріанти зведення довільної просторової системи сил . . . . .	71
5.8. Часткові випадки зведення довільної просторової системи сил . . . . .	73
Контрольні запитання . . . . .	75
Глава 6. Система сил, довільно розміщених по площині (довільна плоска система сил) . . . . .	77
6.1. Визначення головного вектора та головного моменту довільної плоскої системи сил . . . . .	77
6.2. Зведення довільної плоскої системи сил . . . . .	78
6.3. Аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил . . . . .	80
6.4. Рівновага плоскої системи паралельних сил . . . . .	84
6.5. Розподілені навантаження . . . . .	85
6.6. Рівновага системи тіл . . . . .	87
Контрольні запитання . . . . .	89
Глава 7. Тертя . . . . .	91
7.1. Тертя ковзання. Закони Кулона . . . . .	91
7.2. Кут і конус тертя . . . . .	94

7.3. Тертя кочення . . . . .	99
7.4. Тертя вертіння . . . . .	104
Контрольні запитання . . . . .	110
Глава 8. Розрахунок плоских ферм . . . . .	111
8.1. Основні поняття про плоскі ферми . . . . .	111
8.2. Метод вирізання вузлів . . . . .	113
8.3. Метод Ріттера . . . . .	117
Контрольні запитання . . . . .	119
Глава 9. Центр ваги тіла . . . . .	120
9.1. Координати центра паралельних сил . . . . .	120
9.2. Центр ваги твердого тіла . . . . .	122
9.3. Центр ваги однорідного тіла . . . . .	123
9.4. Методи знаходження центра ваги . . . . .	125
Контрольні запитання . . . . .	129
Розділ 2. Кінематика . . . . .	130
Глава 10. Кінематика точки . . . . .	130
10.1. Закон руху точки . . . . .	130
10.2. Швидкість точки . . . . .	138
10.3. Прискорення руху точки . . . . .	142
10.4. Рівномірний та рівнозмінний рухи точки . . . . .	148
Контрольні запитання . . . . .	151
Глава 11. Основні види руху твердого тіла . . . . .	152
11.1. Число степенів вільності і закон руху твердого тіла . . . . .	152
11.2. Поступальний рух твердого тіла . . . . .	152
11.3. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі . . . . .	154
11.4. Передавальні механізми . . . . .	161
Контрольні запитання . . . . .	164
Глава 12. Кінематика складного руху точки . . . . .	166
12.1. Означення параметрів складного руху . . . . .	166
12.2. Обчислення швидкостей і прискорень в складному русі . . . . .	167
12.3. Теореми про додавання швидкостей і прискорень . . . . .	168
Контрольні запитання . . . . .	174
Глава 13. Плоскопаралельний (плоский) рух твердого тіла . . . . .	175

13.1. Плоский рух тіла та рух плоскої фігури. Рівняння руху плоскої фігури . . . . .	175
13.2. Теорема про швидкість точки плоскої фігури . . . . .	178
13.3. Теорема про проєкції швидкостей двох точок тіла . . . . .	180
13.4. Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей . . . . .	180
13.5. План швидкостей . . . . .	184
13.6. Прискорення точки плоскої фігури . . . . .	186
13.7. Миттєвий центр прискорень. Визначення прискорень точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра прискорень . . . . .	188
Контрольні запитання . . . . .	197
Глава 14. Складний рух твердого тіла . . . . .	198
14.1. Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей . . . . .	198
14.2. Розрахунок планетарних і диференціальних механізмів. Формули Вілліса . . . . .	203
14.3. Додавання обертальних рухів тіла навколо осей, що перетинаються . . . . .	206
14.4 Рівняння сферичного руху твердого тіла. Кути Ейлера. . . . .	210
14.5 Визначення кутової швидкості і кутового прискорення тіла за рівняннями його руху. . . . .	212
14.6 Аналітичне знаходження швидкостей точок тіла при сферичному русі. Рівняння миттєвої осі обертання. . . . .	216
14.7 Знаходження швидкостей і прискорень точок тіла при сферичному русі методом миттєвих осей. Теорема Ейлера – Д’Аламбера. . . . .	218
14.8 Рух вільного твердого тіла. Рівняння руху. . . . .	222
14.9 Швидкості точок вільного твердого тіла. . . . .	223
14.10 Прискорення точок вільного твердого тіла. . . . .	225
Контрольні запитання. . . . .	229
Розділ 3. Динаміка . . . . .	231
Глава 15. Динаміка точки . . . . .	231
15.1. Основні поняття та закони динаміки . . . . .	231

15.2. Задачі динаміки точки . . . . .	234
15.3. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки . . .	235
15.4. Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки . .	237
15.5. Інтегрування диференціальних рівнянь прямолінійного руху точки . . . . .	239
Контрольні запитання . . . . .	243
Глава 16. Прямолінійні коливання точки . . . . .	244
16.1. Вільні коливання без врахування опору . . . . .	244
16.2. Вплив постійної сили на вільні коливання точки . . . .	248
16.3. Коливання точки з опором, пропорційним швидкості .	249
16.4. Вимушені коливання. Резонанс . . . . .	252
Контрольні запитання . . . . .	259
Глава 17. Відносний рух точки . . . . .	261
17.1. Диференціальне рівняння відносного руху точки . . . .	261
17.2. Вплив обертання Землі на рівновагу та рух тіл . . . . .	264
Контрольні запитання . . . . .	268
Глава 18. Вступ в динаміку системи. Моменти інерції твердого тіла . . . . .	269
18.1. Механічна система. Зовнішні та внутрішні сили . . . . .	269
18.2. Диференціальні рівняння руху системи точок . . . . .	270
18.3. Маса системи. Центр мас . . . . .	272
18.4. Момент інерції тіла. Радіус інерції . . . . .	273
18.5. Момент інерції відносно паралельних осей. Теорема Гюйгенса-Штейнера . . . . .	275
18.6. Обчислення моментів інерції деяких однорідних тіл .	276
Контрольні запитання . . . . .	279
Глава 19. Теорема про рух центра мас системи . . . . .	280
19.1. Теорема про рух центра мас . . . . .	280
19.2. Закон збереження руху центра мас . . . . .	281
Контрольні запитання . . . . .	283
Глава 20. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки та механічної системи . . . . .	284
20.1. Міри руху . . . . .	284
20.2. Кількість руху точки та системи точок . . . . .	284

20.3. Імпульс сили . . . . .	287
20.4. Теорема про зміну кількості руху точки . . . . .	288
20.5. Теорема про зміну кількості руху системи точок . . . . .	291
20.6. Закон збереження кількості руху . . . . .	293
20.7. Теорема Ейлера . . . . .	294
20.8. Рух тіла із змінною масою. Реактивний рух . . . . .	299
Контрольні запитання . . . . .	303
Глава 21. Теорема про зміну момента кількості руху точки та системи . . . . .	305
21.1. Момент кількості руху точки. Головний момент кількості руху системи . . . . .	305
21.2. Теорема про зміну момента кількості руху точки (теорема моментів) . . . . .	308
21.3. Рух точки під дією центральної сили. Закон площ (закон Кеплера) . . . . .	310
21.4. Теорема про зміну кінетичного момента системи точок (теорема моментів) . . . . .	312
21.5. Закон збереження кінетичного моменту . . . . .	313
Контрольні запитання . . . . .	316
Глава 22. Робота сили. Потужність . . . . .	317
22.1. Елементарна робота сили, прикладеної до точки . . . . .	317
22.2. Робота сили . . . . .	319
22.3. Потужність . . . . .	321
22.4. Приклади обчислення роботи . . . . .	322
Контрольні запитання . . . . .	329
Глава 23. Теорема про зміну кінетичної енергії точки і системи . . . . .	330
23.1. Кінетична енергія точки і системи . . . . .	330
23.2. Кінетична енергія твердого тіла . . . . .	331
23.3. Теорема про зміну кінетичної енергії точки . . . . .	337
23.4. Теорема про зміну кінетичної енергії системи . . . . .	340
23.5. Силоне поле . . . . .	343
23.6. Поверхні рівня. Силкові лінії . . . . .	347
23.7. Потенціальна енергія . . . . .	349



23.8. Закон збереження механічної енергії . . . . .	350
Контрольні запитання . . . . .	351
Глава 24. Динаміка твердого тіла . . . . .	353
24.1. Основні задачі динаміки твердого тіла . . . . .	353
24.2. Поступальний рух твердого тіла . . . . .	353
24.3. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі . . . . .	356
24.4. Фізичний та математичний маятники . . . . .	357
24.5. Експериментальне визначення моментів інерції . . . . .	361
24.6. Плоскопаралельний рух твердого тіла . . . . .	362
Контрольні запитання . . . . .	364
Глава 25. Принцип Д'Аламбера . . . . .	366
25.1 Метод кінетостатики для точки . . . . .	366
25.2. Явище невагомості . . . . .	367
25.3. Метод кінетостатики для системи . . . . .	369
25.4. Головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла . . . . .	372
Контрольні запитання . . . . .	377
Глава 26. Елементарна теорія гіроскопа . . . . .	378
26.1. Основне припущення елементарної теорії гіроскопа . . . . .	378
26.2. Вільний (астатичний) гіроскоп . . . . .	381
26.3. Дія сил на вісь гіроскопа . . . . .	382
26.4. Прецесія гіроскопа під дією сили ваги . . . . .	384
26.5. Гіроскопічний момент . . . . .	385
Контрольні запитання . . . . .	387
Глава 27. Принцип можливих переміщень . . . . .	388
27.1. В'язі і їхня класифікація . . . . .	388
27.2. Можливе переміщення. Число ступенів вільності . . . . .	391
27.3. Елементарна робота сили на можливому переміщенні Ідеальні в'язі . . . . .	392
27.4. Принцип можливих переміщень . . . . .	394
Контрольні запитання . . . . .	396
Глава 28. Загальне рівняння динаміки. Рівняння Лагранжа другого роду . . . . .	397
28.1. Узагальнені координати системи . . . . .	7

28.2. Узагальнені сили . . . . .	400
28.3. Умови рівноваги механічної системи . . . . .	402
28.4. Загальне рівняння динаміки . . . . .	406
28.5. Рівняння Лагранжа другого роду . . . . .	410
Контрольні запитання . . . . .	418
Глава 29. Малі коливання механічної системи біля положення стійкої рівноваги . . . . .	419
29.1. Положення рівноваги і його стійкість . . . . .	419
29.2. Кінетична енергія механічної системи біля положення рівноваги . . . . .	423
29.3. Функція Релея та узагальнені сили опору при малих коливаннях біля положення рівноваги механічної системи . . . . .	425
29.4. Малі коливання механічної системи з одним ступенем вільності біля положення стійкої рівноваги . . . . .	426
29.5. Малі коливання механічної системи з двома ступенями вільності біля положення стійкої рівноваги . . . . .	428
Контрольні запитання . . . . .	432
Глава 30. Теорія удару . . . . .	433
30.1. Основні поняття і означення . . . . .	433
30.2. Загальні теореми динаміки при ударі . . . . .	435
30.3. Удар точки по нерухомій поверхні . . . . .	437
30.4. Прямий центральний удар двох тіл . . . . .	441
30.5. Втрата кінетичної енергії при непружному ударі двох тіл. Теорема Карно . . . . .	444
30.6. Удар по тілу в обертальному русі . . . . .	445
Контрольні запитання . . . . .	446
ЛІТЕРАТУРА . . . . .	447
Предметний вказівник . . . . .	449

## ПЕРЕДМОВА

**Теоретична механіка** – це одна з навчальних дисциплін науки «Механіка». **Саме слово «механіка» грецького походження і в прямому перекладі означає «хитрість».** Цей термін уперше був застосований у III століття до н.е. одним з учнів Аристотеля під час вивчення таких явищ, в яких «менше зусилля перемагає більше», наприклад, у разі піднімання вантажу за допомогою важеля.

**Механіка** – це наука про найпростішу форму руху матерії – механічний рух. **Механічним рухом називають переміщення одного матеріального об'єкта (або його частини) відносно іншого матеріального об'єкта (або іншої його частини) у просторі та часі.** Наприклад, під час руху автомобіля по дорозі одне тіло (автомобіль) переміщається відносно інших тіл – дерев, будинків тощо. Якщо розтягують або стискають пружину, то одна частина переміщається відносно іншої частини. Такий рух називають деформацією. Цей рух вивчають інші дисципліни механіки – опір матеріалів, теорія пружності.

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони механічного руху, який визначається переміщенням одного матеріального об'єкта відносно іншого.

Теоретична механіка, яка вивчає одну з форм руху матерії, належить до природничих наук. Серед природничих наук теоретична механіка займає чільне місце, бо є науковим фундаментом для багатьох технічних дисциплін, теорія яких ґрунтується на положеннях та законах теоретичної механіки.

Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей механічного руху та відображення їх на математичній мові у вигляді рівнянь – законів механічного руху.

Закони, сформульовані теоретичною механікою, є об'єктивними. Ця об'єктивність полягає в тому, що вони відображають закони природи, які людина може вивчити, проте не може змінити. Однак формулювання самих законів часто має

суб'єктивний характер. Один і той самий закон різні автори формулюють по різному, не змінюючи його суті. Другий закон Ньютона в підручниках можна зустріти записаним так: «Прискорення, з яким рухається матеріальна точка, пропорційне силі, яка діє на точку, і обернено пропорційне її масі», «При русі точки має місце векторна рівність  $\vec{F} = -m\vec{a}$ », «Зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна прикладеній силі і відбувається за напрямом дії сили» тощо. З наведеного тільки третє менш-більш відповідає формулюванню І.Ньютона (1642-1726 р. р.) у його трактаті «Математичні начала натуральної філософії» (1687 р.).

Слід також зазначити, що закони механіки, як і сам механічний рух, є відносними. Вони справедливі лише для певної системи відліку. Тому формулюючи закон або використовуючи його для розв'язку певної задачі, необхідно пам'ятати про систему відліку, в якій він має місце. Закони Ньютона, на яких ґрунтується теоретична механіка, справедливі в інерційній системі відліку.

Як уже було зазначено, механічний рух відбувається в **просторі та часі. В теоретичній механіці простір та час вважають абсолютними.** Ця абсолютність полягає в тому, що їхнє існування постулюється, вони є незалежними один від одного, їхня геометрія не залежить від розташованих у них матеріальних об'єктів та від швидкостей, з якими ці об'єкти рухаються. Це суперечить теорії відносності, яка виникла на початку 20 століття. Однак, як показала ця теорія, помітні кількісні відхилення від законів руху, встановлених в класичній механіці, виявляються тільки при швидкостях, близьких до швидкості світла ( $c = 300000$  км/с). Мірою цього відхилення є різниця між одиницею і величиною  $v^2/c^2$ , де  $v$  - швидкість руху тіла. У більшості випадків для сучасної техніки це відношення дуже мале. Для руху штучного супутника навколо Землі зі швидкістю  $v = 8$  км/с вказане відношення дорівнює

$v^2/c^2 = 7 \cdot 10^{-10}$  і порівняно з одиницею є дуже малим. Тому для малих швидкостей сучасної техніки цим відношенням можна нехтувати та вважати простір і час абсолютними.

Навчальну дисципліну «Теоретична механіка» прийнято розділяти на три розділи: статику, кінематику та динаміку. У такому ж порядку та відповідно до навчальної програми з дисципліни «Теоретична механіка» для бакалаврів напряму «Інженерна механіка» викладено навчальний матеріал у цьому підручнику. Форма викладення матеріалу достатньо стисла, деколи навіть конспективна, однак спрямована на формування вмінь та навиків розв'язування задач.

Підручник містить три розділи, які поділені на глави. У кінці кожної глави наведені контрольні запитання та завдання для самоперевірки отриманих знань.

# РОЗДІЛ 1. СТАТИКА

## Глава 1. Загальні поняття статyki

### 1.1. Предмет статyki

**Статикою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчають методи перетворення одних систем сил в еквівалентні їм, а також встановлюють умови рівноваги механічних систем під дією різних систем сил.**

Вивчення цього розділу розпочнемо з розгляду основних понять статyki. Об'єктами вивчення теоретичної механіки є не реально існуючі тіла, а певні абстрактні моделі цих тіл. Такими моделями є **матеріальна точка, система матеріальних точок і абсолютно тверде тіло. Матеріальною точкою** називають тіло, розмірами якого за умовами даної задачі можна знехтувати. **Системою матеріальних точок** називають сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв'язані. **Абсолютно твердим** називають тіло, форми й розміри якого не змінюються під дією прикладеної до нього сили, тобто недеформоване тіло. Усяке фізичне тіло у механіці уявляють як систему матеріальних точок.

У абсолютно твердих тілах відстань між будь-якими двома точками залишається постійною. Поняття про абсолютно тверде тіло є абстрактним, оскільки реальні тіла під дією сил змінюють свою форму й розміри, тобто деформуються. Методи розрахунку таких тіл розглядають у курсах опору матеріалів, теорії пружності тощо.

### 1.2. Сила

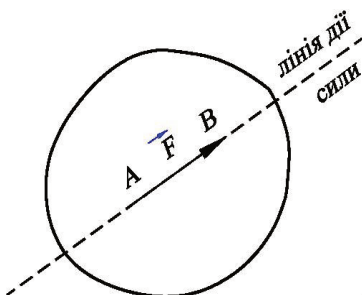
Одним з основних понять теоретичної механіки є поняття сили.

**Силою називають міру механічної взаємодії між тілами, в результаті якої може змінюватися відносно положення тіл, їх швидкості та форма.**

**Сила** – величина векторна і визначається трьома елементами: числовим значенням (модулем), напрямком дії, точкою прикладення. Напрямок, у якому відбувається взаємодія між тілами, називають **лінією дії сили** (Рис. 1.1).

За одиницю сили в системі одиниць СІ прийнятий ньютон [Н]; у технічній системі прийнято кілограм-силу [кгс]

Для порівняння:  $1\text{Н} = 0,102\text{кгс}$ ;  $1\text{кгс} = 9,81\text{Н}$ . Силу, як і будь-яку векторну величину, будемо позначати  $\vec{F}$ , модуль сили  $|\vec{F}| = F$ .



**Рисунок 1.1**

**Сукупність декількох сил**, прикладених до механічної системи, називають **системою сил**. Якщо лінії дії сил системи лежать в одній площині, то її називають **плоскою**, якщо лінії дії сил лежать в різних площинах, то систему сил називають **просторовою**.

Якщо, не порушуючи кінематичного стану тіла, одну систему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  можна замінити іншою системою  $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ , то такі системи сил називають **еквівалентними**. Під кінематичним станом тіла слід розуміти стан його руху або спокою.

Якщо система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  еквівалентна одній силі  $\vec{R}$ , то цю силу називають **рівнодієюю** даної системи сил.

**Зрівноважувальна сила** дорівнює за модулем рівнодійній силі і напрямлена вздовж лінії її дії у протилежний бік. **Зрівноваженою системою** сил називають таку систему сил, під дією якої тіло не змінює свого руху або залишається у стані спокою. **Зрівноважена система сил еквівалентна нулю**.

Якщо тверде тіло під дією деякої системи сил перебуває в рівновазі або в прямолінійному рівномірному русі, то користуються скороченим виразом "рівновага сил".

Усі сили, що діють на механічну систему, поділяють на дві групи: **зовнішні** та **внутрішні**. Зовнішніми називають сили, що діють на тверде тіло з боку інших тіл. Внутрішніми називають сили взаємодії між точками даного тіла.

Силу, що діє на тверде тіло в одній точці, називають **зосередженою силою**.

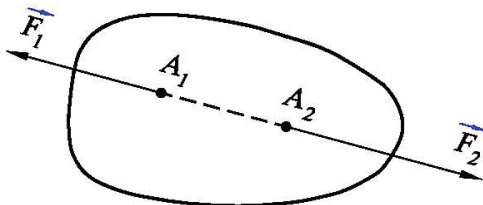
Сили, що діють на точки об'єму, поверхні чи лінії тіла, називають **розподіленими силами**. Розподілені сили характеризують інтенсивністю  $q$ .

### 1.3. Аксиоми статички

В основі статички лежать експериментально і логічно встановлені твердження (аксиоми), які відображають властивості сил, що діють на тверде тіло.

#### 1. Аксиома про дві сили

Дві сили, прикладені до твердого тіла, будуть урівноважені (еквівалентні нулю) тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем, діють на одній прямій і спрямовані в протилежні боки (Рис. 1.2):



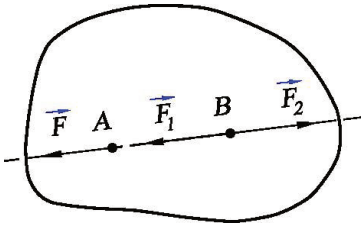
система  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  еквівалентна 0;  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ;  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ .

Рисунок 1.2

#### 2. Аксиома про приєднання або вилучення зрівноважених сил

Не змінюючи системи сил, що діє на тіло, до неї можна приєднувати або з неї вилучати будь-яку зрівноважену систему сил.





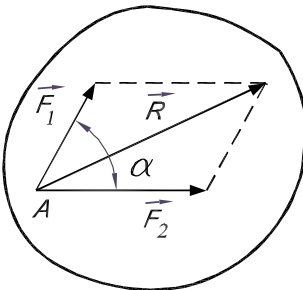
**Рисунок 1.3**

**Доведення.** Нехай на абсолютно тверде тіло діє сила  $\vec{F}$ , прикладена в точці  $A$  (Рис.1.3). У точці  $B$ , яка лежить на лінії дії сили  $\vec{F}$ , прикладемо дві зрівноважені сили  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ , причому  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$ . Система сил  $(\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F})$  еквівалентна  $\vec{F}$  на підставі аксіоми 2. Сили  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  є також зрівноваженими згідно з аксіомою 1 та за аксіомою 2 їх можна вилучити. Тоді залишається сила  $\vec{F}_1$ , прикладена в точці  $B$ , що необхідно було довести. Отже, силу можна переносити вздовж лінії дії, тобто вона є **ковзаючим вектором**.

Зауважимо, що аксіоми 1, 2 та наслідок з них справедливі лише для абсолютно твердих тіл.

### 3. Аксіома про паралелограм сил

Дві сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодійну, яка прикладена в тій самій точці, і визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах (Рис. 1.4).



Згідно з цією аксіомою система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  еквівалентна  $\vec{R}$ . За правилом додавання векторів рівнодійна дорівнює геометричній сумі цих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

**Рисунок 1.4**

Модуль рівнодійної визначають за формулою:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha},$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ .

#### 4. Аксиома про рівність дії та протидії

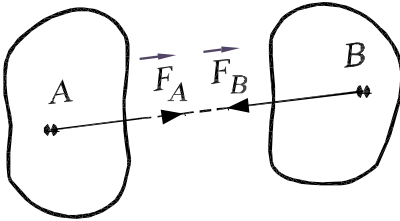


Рисунок 1.5

Сили взаємодії двох тіл рівні за модулем і спрямовані по одній прямій в протилежні боки.

Якщо тіло  $A$  діє на тіло  $B$  з силою  $\vec{F}_A$  (Рис. 1.5), то тіло  $B$  діє

на тіло  $A$  з силою  $\vec{F}_B$ , причому

$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ , а  $F_A = F_B$ . Однак ці сили

не зрівноважені, бо прикладені до різних тіл, тобто система сил  $(\vec{F}_A, \vec{F}_B)$  не еквівалентна нулю.

#### 5. Аксиома про затвердіння або принцип затвердіння

Якщо не абсолютно тверде тіло (тіло, що деформується) перебуває в стані рівноваги, то рівновага його не порушиться, якщо воно затвердіє.

Принцип затвердіння має велике значення для вивчення рівноваги тіл, які деформуються. З нього випливає, що умови рівноваги сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, поширюються на вивчення рівноваги не абсолютно твердих тіл.

Отже, умови рівноваги сил, прикладених до твердих тіл, є необхідними, але не достатніми для деформівних тіл. Так, для рівноваги гнучкої нитки недостатньо того, щоб прикладені до її кінців сили були однакові за модулем і напрямлені по одній прямій у протилежні боки. Потрібно ще, щоб ці сили розтягували нитку.

Перш ніж перейти до формулювання останньої аксіоми статички, введемо поняття в'язей і реакцій в'язей.

Тіла в природі можна поділити на **вільні та невільні**. Вільними називають тіла, які під дією системи сил можуть переміщатися в просторі у будь-якому напрямку. Тіло, рух якого в просторі обмежений іншими тілами, називають невільним. **Тіла, які обмежують рух даного твердого тіла в просторі, називають в'язями.**

Очевидно, між тілом і в'язями існують механічні взаємодії. Вплив тіла на в'язь називатимемо дією, а вплив в'язі на тіло протидією. Протидії в'язей називають **реакціями в'язей**. **Реакція в'язі – це сила, з якою в'язь діє на тіло.** Вона спрямовується протилежно до того напрямку, в якому в'язь перешкоджає можливому руху тіла.

Оскільки в статичці встановлюють умови рівноваги, в основному, для вільних тіл, то для використання цих умов до невільних тіл слід застосувати аксіому про в'язі.

#### **6. Аксіома про в'язі або принцип звільнення від в'язей**

**Не змінюючи кінематичного стану тіла, всяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі, а їх дію замінити реакціями в'язей.**

### **1.4. Механічні в'язі та їх реакції**

Конструктивно в'язі можуть бути виконані у вигляді різних опор, шарнірних з'єднань, гнучких елементів тощо. Вважатимемо, що в'язі виконані з абсолютно твердих тіл, тертя в місцях з'єднання в'язі з основним тілом незначне, тому ним можна знехтувати. **Такі в'язі, в яких не беруть до уваги тертя, будемо називати ідеальними.** Розглянемо основні типи в'язей.

#### **Гладка опорна поверхня**

Така в'язь є ідеальною поверхнею, тобто поверхнею без тертя. Наприклад, дзеркальна, льодяна, добре відшліфована металева поверхні тощо.

Реакція  $\vec{N}$  гладкої опорної поверхні спрямована по нормалі до спільної дотичної площини  $\Pi$ , проведеної через точку  $A$  контакту тіла і в'язі, та прикладена в цій точці (Рис. 1.6, а).

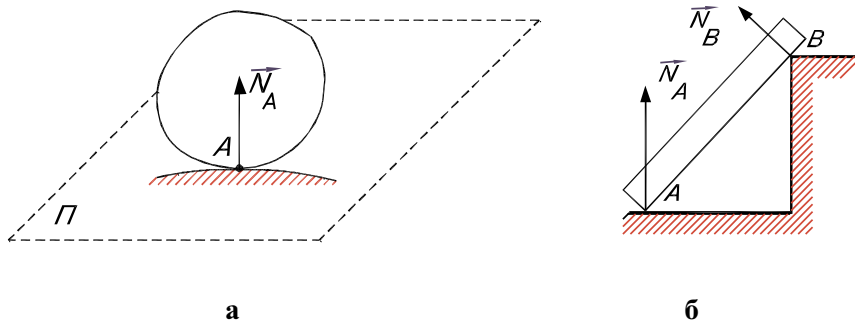


Рисунок 1.6

Напрямок реакції  $\vec{N}$  протилежний до напрямку, в якому в'язь обмежує рух тіла  $M$ . Реакцію  $\vec{N}$  називають нормальною реакцією.

Окремими випадками такого типу в'язей будуть обпирання тіла на ребро або точку гладкої опорної поверхні (Рис. 1.6, б). Якщо тіло обпирається до поверхні в точці (опора  $B$  на рис. 1.6, б), то реакцію спрямовують по нормалі до поверхні тіла.

### Шорстка опорна поверхня

Тіло вагою  $\vec{P}$  лежить на шорсткій горизонтальній поверхні (Рис. 1.7, а).

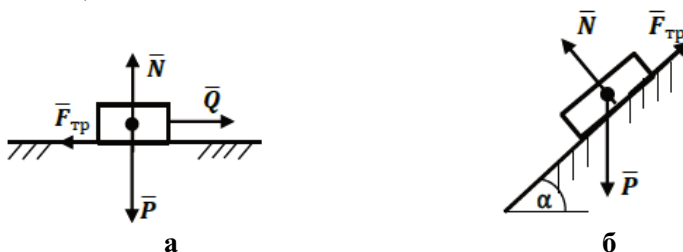


Рисунок 1.7

Якщо до тіла прикласти горизонтальну силу  $\vec{Q}$ , то на тіло крім двох зрівноважених сил  $\vec{N}$ ,  $\vec{P}$  і сили  $\vec{Q}$ , буде діяти сила  $\vec{F}_{TP}$ , яка виникає на границі контакту тіл і яка буде напрямлена протилежно до сили  $\vec{Q}$ . Силу  $\vec{F}_{TP}$  називають силою тертя ковзання. Максимальна сила тертя ковзання визначається за формулою:

$$F_{TP} = f \cdot N,$$

де  $f$  - статичний коефіцієнт тертя ковзання.

(Детальніше див. в главі 7).

### Гнучка в'язь

Гнучкі в'язі реалізують за допомогою ниток, шнурків, ланцюгів, канатів, які вважаємо нерозтяжними і невагомими. Гнучка в'язь не дозволяє тілу  $M$  віддалятися від точки закріплення (точка  $B$  на Рис. 1.8). Тому реакцію гнучкої в'язі спрямовують по ній від точки з'єднання тіла і в'язі до точки кріплення в'язі з нерухомою поверхнею (від точки  $A$  до точки  $B$  на Рис. 1.8). Слід зауважити, що гнучка в'язь працює тільки на розтягання.

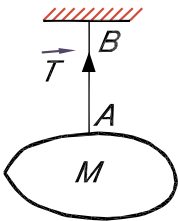


Рисунок 1.8

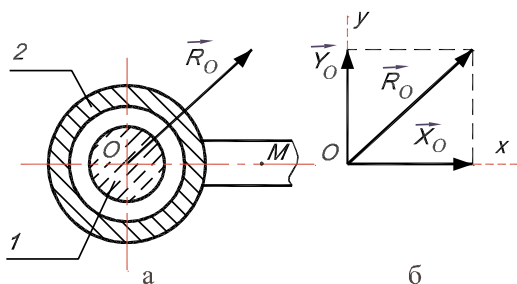
### Циліндричний шарнір (підшипник)

Ця опора здійснюється за допомогою двох циліндрів, що мають спільну геометричну вісь (Рис. 1.9), яка перпендикулярна до площини рисунка і проходить через точку  $O$ . На Рис. 1.9, а опора зображена в розрізі. Циліндр 1, який називають віссю, прикріплений до нерухомої основи. Циліндр 2, який називають втулкою, жорстко з'єднаний з тілом  $M$ , рівновагу якого розглядають. Циліндричний шарнір дозволяє повертатись тілу  $M$  навколо осі 1 і рухатись уздовж цієї осі.

Лінія дії реакції  $\vec{R}_0$  циліндричного шарніра проходить через центр  $O$  шарніра. Напрямок реакції  $\vec{R}_0$  вказати неможливо. Тому у разі звільнення тіла від такої в'язі реакцію  $\vec{R}_0$  доцільно

заміняти двома складовими  $\vec{X}_0$  і  $\vec{Y}_0$  (Рис. 1.9, б), напрямком яких приймають за додатними напрямками осей координат. Тоді складові реакції  $\vec{X}_0$ ,  $\vec{Y}_0$  невідомі лише за алгебраїчною величиною. Розв'язуючи конкретну задачу, знаходять алгебраїчні значення  $\vec{X}_0$  і  $\vec{Y}_0$ . Величину і напрямком реакції  $\vec{R}_0$  визначають за формулами:

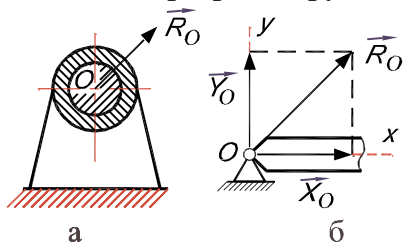
$$R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}; \quad \cos \angle(x, \vec{R}_0) = \frac{X_0}{R_0}; \quad \cos \angle(y, \vec{R}_0) = \frac{Y_0}{R_0}.$$



На принципі циліндричного шарніру побудовано шарнірно-нерухомі і шарнірно-рухомі опори.

Рисунок 1.9

### Шарнірно-нерухома і шарнірно-рухома опори



Шарнірно-нерухома опора (нерухомий шарнір) дає змогу тілу вільно повертатися навколо осі шарніра, але перешкоджає його лінійним переміщенням у всіх напрямках (Рис. 1.10, а).

Рисунок 1.10

Реакція шарнірно-нерухомої опори проходить через центр  $O$  шарніра та лежить в площині, перпендикулярній до осі шарніра. При розв'язуванні практичних задач цю реакцію представляють двома складовими  $\vec{X}_0$  і  $\vec{Y}_0$  (Рис. 1.10, б). Шарнірно-рухома опора за своєю конструкцією аналогічна до попередньої. Відмінність лише в тому, що нижня обойма шарніра поставлена на котки

(Рис. 1.11, а), які дозволяють переміщати тіло  $M$  паралельно до нерухокої опорної поверхні. Лінія дії реакції  $\vec{N}$  опори проходить через центр шарніра і перпендикулярна до опорної поверхні (Рис. 1.11, б).

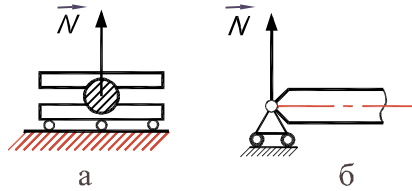


Рисунок 1.11

### Сферичний шарнір

Такою в'яззю є куля, розміщена в сферичній порожнині (Рис. 1.12).

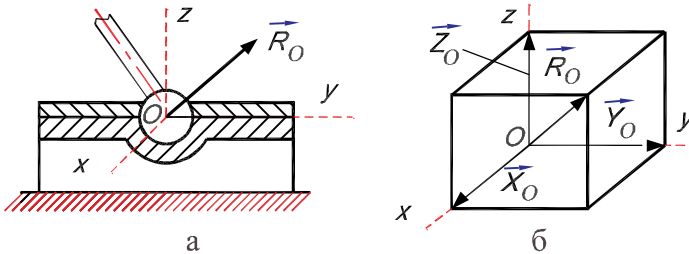
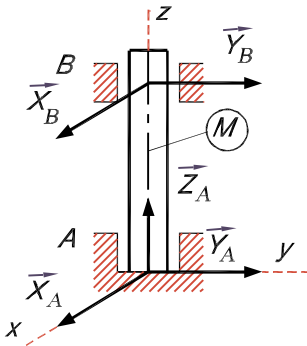


Рисунок 1.12

Реакція  $\vec{R}_0$  сферичного шарніра проходить через центр  $O$  шарніра і має довільний напрямок у просторі. Практично реакцію  $\vec{R}_0$  сферичного шарніра розкладають на три складових  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  (Рис. 1.12, б). Величину і напрямок реакції  $\vec{R}_0$  визначають за формулами:

$$R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2};$$

$$\cos \angle(x, \vec{R}_0) = \frac{X_0}{R_0}; \quad \cos \angle(y, \vec{R}_0) = \frac{Y_0}{R_0}; \quad \cos \angle(z, \vec{R}_0) = \frac{Z_0}{R_0}.$$



**Рисунок 1.13**

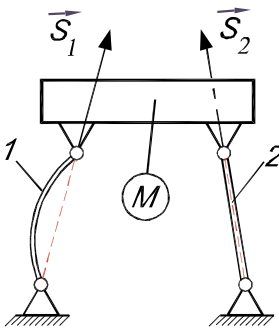
Підшипник є різновидом циліндричного шарніра (Рис. 1.13). Реакція підшипника  $B$  лежить у площині, перпендикулярній до осі підшипника. При практичному розв'язку задач її показують двома складовими  $\vec{X}_B$  і  $\vec{Y}_B$ .

Підп'ятник утворюється поєднанням підшипника з опорною площиною, яка обмежує переміщення тіла  $M$  вздовж осі підшипника в бік опорної площини (опора  $A$  на Рис. 1.13).

Реакцію підп'ятника  $A$  при практичному розв'язанні задач представляють трьома складовими  $X_A$ ,  $Y_A$  і  $Z_A$  (Рис. 1.13).

### Ідеальна стержнева в'язь

В'язь виконують у вигляді жорстких стержнів, які розглядають як абсолютно тверді тіла, невагомі та ненавантажені зовнішніми силами. Такі стержні називають ідеальними. Кінці стержнів прикріплені до тіла і нерухокої основи за допомогою циліндричних або сферичних шарнірів, розмірами яких і тертям у яких нехтуємо.



**Рисунок 1.14**

Нехай для тіла  $M$ , яке перебуває в рівновазі, ідеальні стержні 1 і 2 є в'язями (Рис. 1.14). Тоді кожен із стержнів є тілом, яке знаходиться в рівновазі під дією двох сил, прикладених у точкових шарнірах. На підставі аксіом 1 та 4 реакція ідеального шарнірно закріпленого стержня спрямовується по прямій, що з'єднує центри точкових шарнірів.



## Жорстке защемлення

Такий тип в'язі є тоді, коли тіло нерухомо з'єднане з опорою (в'яззю) (Рис. 1.15). Ця в'язь обмежує не тільки лінійні переміщення тіла в опорі, а також повертання тіла.

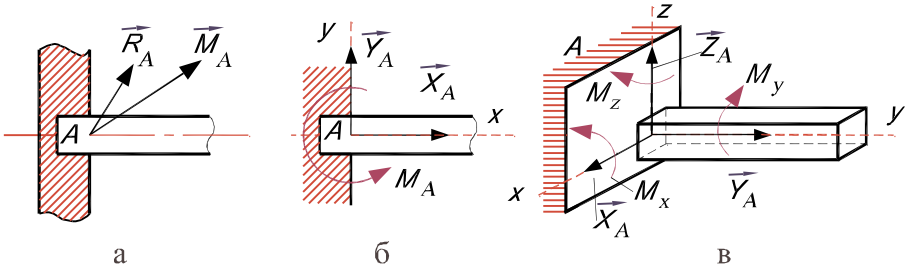


Рисунок 1.15

Тому реакцію жорсткого защемлення складають сила  $\vec{R}_A$  та момент  $\vec{M}_A$  (Рис. 1.15, а), величини і напрямки яких залежать від сил, прикладених до тіла  $M$  та наперед невідомі. Момент  $\vec{M}_A$  називають **реактивним моментом**.

У разі, коли активні сили, що діють на тіло, розміщені в одній площині, реакція  $\vec{R}_A$  і пара сил з моментом  $M_A$  теж розміщені в тій самій площині (Рис. 1.15, б).

У просторовій задачі реакцію защемлення  $\vec{R}_A$  розкладають на три складові  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{Z}_A$ , а реактивний момент  $\vec{M}_A$  зображають у вигляді трьох пар сил з моментами  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  (Рис. 1.15, в).

Слід зазначити, що реакція в'язі завжди направлена вздовж спільної нормалі до стичних поверхонь, яка проходить через центри кривизни цих поверхонь. Якщо центри кривизни стичних поверхонь є різними точками, то існує одна спільна нормаль, якщо центри кривизни збігаються – то існує нескінченна множина спільних нормалей. Прикладами в'язей з нескінченною

множиною спільних нормалей є циліндричний або сферичний підшипники.

Вектор реакції в'язі на практиці не завжди заміняють його проекціями. Це доцільно робити тоді, коли зручно для розв'язування задачі.

### 1.5. Задачі статички

У статисти абсолютно твердого тіла розглядають дві основні задачі.

**Перша задача статички** – це задача про еквівалентні перетворення систем сил і заміну їх простішими. Вона має важливе значення не тільки в статисти, а й у динаміці.

**Друга задача** – про рівновагу системи сил. Ця задача полягає у з'ясуванні необхідних для рівноваги твердого тіла умов, які повинні задовольняти системи сил, прикладені до цього тіла. Встановлені умови рівноваги використовують при розв'язуванні задач з визначення невідомих активних сил і реакцій в'язей.

Розв'язувати обидві задачі статички можна як геометричним, так і аналітичним способами.

### Контрольні запитання

1. Чим відрізняється матеріальна точка від геометричної?
2. Яке тіло називають абсолютно твердим?
3. Що називають силою, системою сил? Якими елементами визначається сила?
4. Які дві системи сил будуть еквівалентними?
5. Що розуміють під рівновагою тіла, сил?
6. У чому схожість і різниця між: а) рівнодієюю та зрівноважуючою силами; б) зовнішніми та внутрішніми силами?
7. Сформулюйте аксіоми статички.
8. Що розуміють під в'язями та їх реакціями? Чим відрізняються активні сили від реакцій?

9. Назвіть основні види в'язей. Як знаходити їхні реакції?
10. Чи залишаються постійними реакції в'язей при зміні зовнішніх сил, що діють на тіло?
11. Сформулюйте задачі статички.

## Глава 2. Система збіжних сил

### 2.1. Рівнодійна системи збіжних сил

Систему сил, лінії дій яких перетинаються в одній точці, називають збіжною. Системи збіжних сил можуть бути плоскими і просторовими.

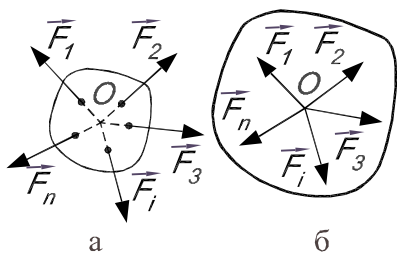


Рисунок 2.1

Нехай на тверде тіло діє збіжна система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , лінії дій яких перетинаються в точці  $O$  (Рис. 2.1, а).

Використовуючи наслідок з аксіоми 2, перенесемо сили вздовж ліній їх дій в точку  $O$  і одержимо еквівалентну систему сил, прикладених до твердого тіла в одній точці (Рис. 2.1, б).

Сили, прикладені в одній точці твердого тіла, можна додавати, використовуючи аксіому про паралелограм сил. Нехай до тіла в точці  $O$  прикладена система чотирьох збіжних сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$  (Рис. 2.2, а)

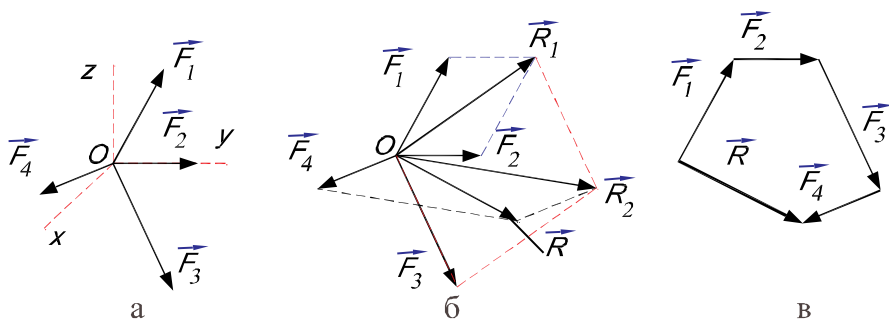


Рисунок 2.2

Знайдемо рівнодійну  $\vec{R}_1$  сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  (Рис. 2.2, б)

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Рівнодійна  $\vec{R}_1$  еквівалентна  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ . До рівнодійної  $\vec{R}_1$  додамо силу  $\vec{F}_3$ . Одержимо

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Рівнодійна  $\vec{R}_2$  еквівалентна системі сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ .

Додамо рівнодійну  $\vec{R}_2$  з останньою силою  $\vec{F}_4$  і одержимо рівнодійну чотирьох сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4,$$

Рівнодійна  $\vec{R}$  еквівалентна системі сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ .

Поширюючи це правило додавання векторів на довільну кількість збіжних сил, можна стверджувати, що **система збіжних сил еквівалентна одній силі – рівнодійній, яка дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в точці перетину ліній їх дій:**

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.1)$$

Як видно з рис. 2.2, б, побудова паралелограмів сил еквівалентна побудові **векторного многокутника сил**. Для системи сил, зображеної на Рис. 2.2, а, векторний многокутник сил побудуємо так: до кінця вектора  $\vec{F}_1$  приєднаємо вектор, який геометрично дорівнює  $\vec{F}_2$ , а з його кінця відкладемо вектор  $\vec{F}_3$  тощо (Рис. 2.2, в). Вектор, проведений з точки прикладання першої сили  $\vec{F}_1$  до кінця  $\vec{F}_4$ , є рівнодійною силою  $\vec{R}$ . Визначення рівнодійної системи збіжних сил за правилом паралелограма або силового многокутника називають геометричним способом визначення рівнодійної.

## 2.2. Проекція сили на вісь і площину

Аналітичний спосіб розв'язування задач статки ґрунтується на понятті про проекцію сили на вісь.

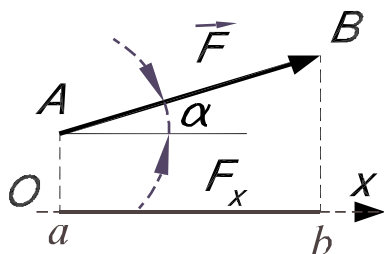


Рисунок 2.3

Проекція вектора сили на вісь є алгебраїчна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатнім напрямком осі і вектором сили (Рис. 2.3).

$$F_x = np_x \vec{F} = F \cos \alpha. \quad (2.2)$$

Відзначимо, що при  $|\vec{F}| > 0$ :  $F_x > 0$  коли  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;

$$F_x = 0 \text{ коли } \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad F_x < 0 \text{ коли } \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi.$$

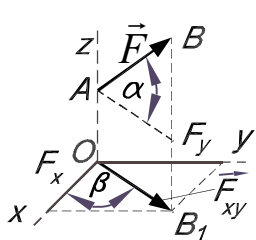


Рисунок 2.4

Проекція вектора сили  $\vec{F}$  на площину  $Oxy$  є вектор  $\vec{F}_{xy} = \overrightarrow{OB_1}$ , що лежить між проекцією початку та кінця цього вектора на площину (Рис. 2.4).

Величина цієї проекції:

$$F_{xy} = F \cos \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між вектором сили  $\vec{F}$  і площиною  $Oxy$ . Знайдену проекцію сили на площину спроекуємо на осі  $Ox$  і  $Oy$ :

$$\begin{cases} F_x = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta, \\ F_y = F_{xy} \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для розв'язування багатьох задач механіки в декартовій системі координат зручно подавати силу  $\vec{F}$  через її розклад за век-

торами ортонормованого базису (одиничні вектора)  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  (Рис. 2.5).

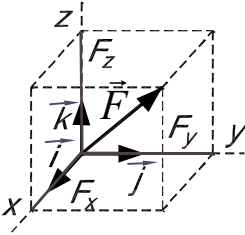


Рисунок 2.5

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad (2.4)$$

де  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  проекції сили  $\vec{F}$  на осі системи координат  $x, y, z$  відповідно.

За відомими проекціями сили на осі системи координат можна визначити модуль сили і кути, які вона утворює з координатними осями, за формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \\ \cos \angle(\vec{i}, \vec{F}) = \frac{F_x}{F}, \\ \cos \angle(\vec{j}, \vec{F}) = \frac{F_y}{F}, \\ \cos \angle(\vec{k}, \vec{F}) = \frac{F_z}{F}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

### 2.3. Аналітичний спосіб визначення рівнодійної

Крім геометричного існує ще й аналітичний спосіб визначення рівнодійної системи збіжних сил. Якщо рівність (2.1) спроектуємо на осі декартової системи координат, то одержимо

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (2.6)$$

де  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  - проекції рівнодійної  $\vec{R}$  на осі координат;

$F_{ix}$ ,  $F_{iy}$ ,  $F_{iz}$  - проекції сили  $\vec{F}_i$  на осі координат.

Отже, проекція рівнодійної системи збіжних сил на будь-яку з координатних осей дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на відповідну вісь.

Модуль і напрямок рівнодійної  $\vec{R}$  визначають за формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (2.7)$$

$$\cos \angle(\vec{i}, \vec{R}) = \frac{R_x}{R}; \cos \angle(\vec{j}, \vec{R}) = \frac{R_y}{R}; \cos \angle(\vec{k}, \vec{R}) = \frac{R_z}{R}.$$

## 2.4. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил

З означення зрівноваженої системи сил випливає, що тіло може перебувати у рівновазі під дією даної системи сил тоді, коли рівнодійна  $\vec{R} = 0$ . Якщо при побудові силового многокутника виявиться, що кінець вектора останньої сили збігається з початком вектора першої сили, то такий многокутник сил називають замкненим.

Отже, для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий многокутник, побудований на цих силах, був замкненим.

Ця умова рівноваги визначається векторною рівністю

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (2.8)$$

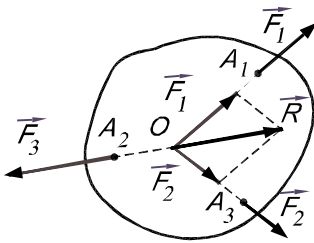
Рівність (2.8) називають **геометричною** умовою рівноваги системи збіжних сил.

## 2.5. Теорема про три непаралельні сили

**Теорема.** Якщо вільне тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дій цих сил перетинаються в одній точці.



**Доведення.** Нехай тіло перебуває у рівновазі під дією трьох непаралельних сил ( $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ ) (Рис. 2.6).



Знайдемо точку  $O$  перетину ліній дій сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , і перенесемо ці сили в цю точку. Згідно з аксіомою 3

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Отже,  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$  еквівалентна системі  $\vec{R}, \vec{F}_3$ .

**Рисунок 2.6**

Тепер можна вважати, що тіло перебуває в рівновазі під дією лише двох сил  $\vec{R}$  і  $\vec{F}_3$ .

Згідно з аксіомою 1 це можливо лише при  $\vec{R} = -\vec{F}_3$ . Таким чином, лінія дії сили  $\vec{F}_3$  повинна проходити через точку  $O$ , тобто система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$  має бути збіжною.

Ця теорема є необхідною, проте не достатньою умовою рівноваги.

## 2.6. Аналітичні умови рівноваги

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил впливають з геометричної умови (2.8), згідно з якою модуль рівнодійної дорівнює нулю. Використовуючи це значення рівнодійної в формулі (2.7), одержуємо:  $R_x = 0; R_y = 0; R_z = 0$ , або згідно з (2.6):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (2.9)$$

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на кожен з координатних осей дорівнювала нулю.

Рівності (2.9) називають **аналітичними** умовами рівноваги системи збіжних сил.

Для випадку плоскої системи збіжних сил отримаємо, відповідно, дві умови рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (2.10)$$

Аналітичні умови рівноваги широко застосовують при розв'язуванні практичних задач. У випадку просторової системи збіжних сил використовують виключно рівняння (2.9).

## 2.7. Статично визначувані і статично невизначувані задачі

При розв'язанні задач статичної реакції в'язей, як правило, є невідомими величинами. Для їх визначення існують умови рівноваги тієї чи іншої системи сил. Умови рівноваги, в які входять відомі активні сили і невідомі реакції в'язей, називають **рівняннями рівноваги**. Розв'язуючи рівняння рівноваги, визначають невідомі величини.

**Задачі, в яких кількість невідомих величин дорівнює кількості рівнянь рівноваги, в які вони входять, називають статично визначуваними.** Механічні системи, для яких це має місце, є статично визначуваними.

**Задачі, в яких кількість невідомих величин більша, ніж кількість рівнянь рівноваги, в які входять ці величини, називають статично невизначуваними.** Системи, для яких це має місце, є статично невизначуваними.

## 2.8. Методика та приклади розв'язування задач статички

Усі задачі статички розв'язують за однією методикою, згідно з якою необхідно:

1) вибрати об'єкт рівноваги. Це може бути точка, тіло або система тіл, до яких прикладені задані та невідомі сили;

2) дотримуючись певного масштабу, зробити чіткий схематичний рисунок до задачі;

3) зобразити на рисунку всі задані сили, прикладені до об'єкта рівноваги;

4) умовно звільнити об'єкт рівноваги від накладених в'язей, а їх дію замінити реакціями в'язей. Зобразити на рисунку реакції в'язей;

5) вияснити, яка система сил діє на об'єкт рівноваги і які умови рівноваги раціонально використати;

6) відповідно до умов рівноваги скласти рівняння рівноваги або виконати відповідні графічні побудови;

7) розв'язати рівняння рівноваги, визначити невідомі величини та проаналізувати одержані результати.

Всі розрахунки в процесі розв'язку задачі рекомендується виконувати у загальному вигляді, а числові значення підставляти лише в кінцеві алгебраїчні вирази.

**Задача 2.1.** Ліхтар вагою  $G = 20H$  підвішений на вертикальному тросі, який відтягнутий до стін тросами  $OA$  та  $OB$  (Рис. 2.7, а).

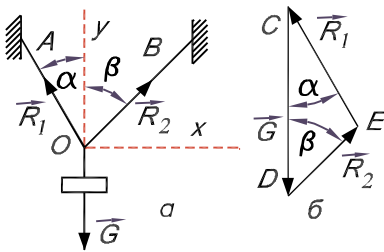


Рисунок 2.7

льному тросі, який відтягнутий до стін тросами  $OA$  та  $OB$  (Рис. 2.7, а). Кути, утворені тросами  $OA$  і  $OB$  з вертикальною лінією, відповідно дорівнюють  $\alpha = 30^\circ$  і  $\beta = 45^\circ$ . Визначити натяг тросів.

### Розв'язок

Розглянемо рівновагу точки  $O$ . Зображаємо активну силу, що діє на точку  $O$  (вага ліхтаря).

Умовно звільняємо ліхтар від в'язей та їх дію замінюємо реакціями в'язей  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$ . Реакції тросів завжди напрямлені вздовж тросів до точок підвісу, тому що троси працюють тільки на розтягання (Рис. 2.7, а).

Раціонально вибираємо осі координат.

**Аналітичний метод розв'язування задачі.** Для плоскої системи збіжних сил складаємо два рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -R_1 \sin \alpha + R_2 \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta - G = 0.$$

Невідомих сил у задачі дві (реакції  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$ ), рівнянь рівноваги також два, тобто задача статично визначувана.

Розв'язавши систему рівнянь, одержимо:  $R_1 = 14,64H$ ,  $R_2 = 10,35H$ .

**Відповідь.** Натяги тросів дорівнюють за модулем реакціям і напрямлені у протилежні їм боки.

**Графоаналітичний метод розв'язування задачі.** Будуємо замкнений силовий трикутник, починаючи із заданої сили  $G$  (Рис. 2.7, б). Модуль невідомих реакцій  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$  визначаємо з трикутника  $CDE$  за допомогою теореми синусів

$$\frac{G}{\sin 105^\circ} = \frac{R_1}{\sin 45^\circ} = \frac{R_2}{\sin 30^\circ}.$$

Звідси:

$$R_1 = \frac{G \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = 14,64H; \quad R_2 = \frac{G \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = 10,35H.$$

Реакції, визначені двома методами, однакові, тобто задача розв'язана правильно.

**Задача 2.2.** Вага однорідної горизонтальної балки  $AB$  дорівнює  $150 \text{ кН}$  (Рис. 2.8, а). Кут  $\alpha = 45^\circ$ . Балка утримується у рівновазі за допомогою опор  $A$  і  $B$ . Визначити реакції опор балки.

### Розв'язок

Розглянемо рівновагу балки. Прикладаємо активну силу ваги  $\vec{G}$  посередині балки (Рис. 2.8, б). Умовно звільняємо балку від

в'язей та їх дію замінюємо реакціями в'язей. Реакцію  $\vec{R}_B$  шарнірно рухомої опори  $B$  направляємо перпендикулярно до опорної поверхні. Реакція  $\vec{R}_A$  шарнірно-нерухомої опори  $A$  за теоремою про три непаралельні сили направляємо до точки перетину сил  $\vec{G}$  і  $\vec{R}_B$ .

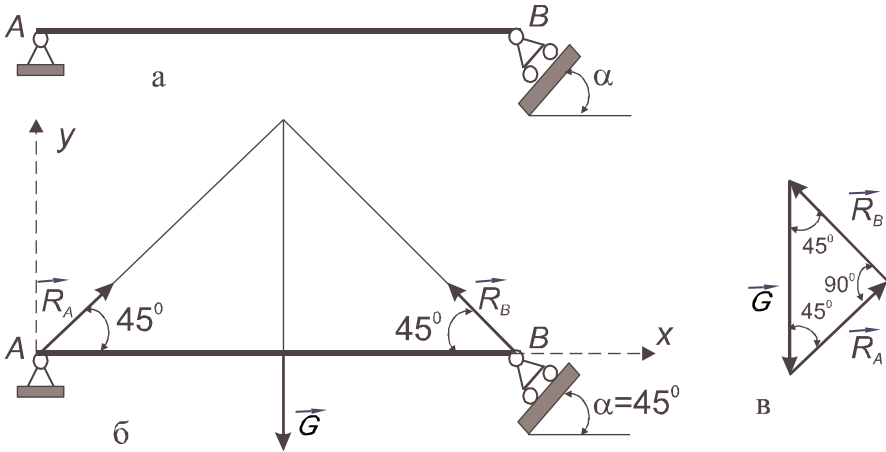


Рисунок 2.8

**Аналiтичний метод розв'язування задачi.** Для плоскої системи збiжних сил складаємо два рiвняння рiвноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_A \cos \alpha - R_B \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_A \sin \alpha + R_B \sin \alpha - G = 0.$$

Невiдомих сил у задачi двi (реакцiї  $\vec{R}_A$  та  $\vec{R}_B$ ), рiвнянь рiвноваги також два, отже задача статично визначувана.

Розв'язавши систему рiвнянь, одержимо:  $R_A = R_B = 106 \text{ H}$ .

**Графоаналiтичний метод розв'язування задачi.** Будуємо замкнений силовий трикутник, починаючи з заданої сили  $\vec{G}$  (Рис.

2.7, в). Модуль невідомих реакцій  $\vec{R}_A$  і  $\vec{R}_B$  визначаємо з трикутника  $CDE$  за допомогою теореми синусів:

$$\frac{G}{\sin 90^\circ} = \frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{R_B}{\sin 45^\circ}.$$

Звідси

$$R_A = \frac{G \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{150 \cdot 0,707}{1} = 106H; \quad R_B = \frac{G \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = 106H.$$

Реакції, визначені двома методами, однакові, отже задача розв'язана вірно.

### Контрольні запитання

1. Яку систему сил називають збіжною?
2. Які є системи збіжних сил? Наведіть приклади найпростіших систем збіжних сил.
3. Сформулюйте правила побудови силового трикутника, паралелограма і многокутника.
4. Сформулюйте графічні і аналітичні умови рівноваги плоскої та просторової системи збіжних сил.
5. Чи може вільне тверде тіло перебувати у рівновазі під дією:
  - а) однієї сили; б) двох сил; в) трьох сил?
6. Що називають проекцією сили на вісь, на площину?
7. Сформулюйте теорему про три непаралельні сили.
8. Як визначають модуль і напрямок рівнодійної збіжних сил?
9. Яку задачу називають статично невизначуваною?

## Глава 3. Моменти сил

Поняття про момент сили – одне з основних понять механіки, яке широко використовують і в теоретичних дослідженнях, і при практичних розрахунках. До поняття моменту сили людство прийшло, розглядаючи рівновагу та рух тіл, що мають точку або вісь обертання. Наприклад, на нерухомий блок (Рис. 3.1) діє сила  $\vec{F}$ , яка обертає його навколо горизонтальної осі  $O$ . Мірою обертальної дії сили на тіло є момент сили.

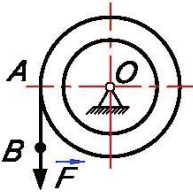


Рисунок 3.1

### 3.1. Момент сили відносно центра (точки)

Задана сила  $\vec{F}$ , зображена вектором  $\overline{AB}$ , прикладена до тіла в точці  $A$ . Визначимо момент сили  $\vec{F}$  відносно центра  $O$  (Рис. 3.2).

**Моментом сили відносно центра (точки) називають вектор, прикладений у центрі  $O$ , який дорівнює векторному добутку радіус-вектора точки  $A$  прикладання сили і вектора сили:**

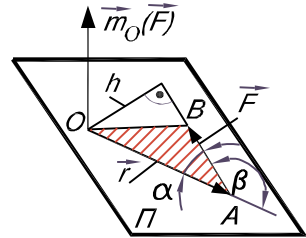


Рисунок 3.2

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (3.1)$$

де  $\vec{r} = \overline{OA}$  - радіус-вектор точки прикладання сили відносно центра  $O$ .

Якщо радіус-вектор точки прикладання сили  $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$  і вектор сили  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  задані розкладом за векторами ортонормованого базису  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  декартової системи координат, тоді

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Визначимо величину (модуль) і напрямок вектора  $\vec{m}_O(\vec{F})$  (Рис. 3.2). Відповідно до поняття і властивостей векторного добутку двох векторів величина (модуль) моменту сили відносно центра дорівнює

$$m_O(\vec{F}) = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha, \quad (3.2)$$

оскільки  $\sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) = \sin \beta = \sin \alpha$ .

Але  $r \sin \alpha = h$  (Рис. 3.2) – висота  $\Delta OAB$ , опущена з вершини  $O$  на сторону  $AB$  цього трикутника, що збігається з лінією дії сили. **Відстань  $h$  від центра  $O$  до лінії дії сили називають плечем сили  $\vec{F}$  відносно цього центра.** Тоді модуль моменту сили відносно центра дорівнює добутку величини сили на її плече відносно цього центра:

$$|m_O(\vec{F})| = |\vec{F}|h.$$

Вектор  $\vec{m}_O(\vec{F})$  спрямовують за правилом векторного добутку: тобто вектор-момент сили відносно центра перпендикулярний до площини  $\Pi$ , в якій розміщені сила і центр  $O$  так, щоб з його кінця було видно намагання сили повертати тіло навколо центра проти ходу стрілки годинника.

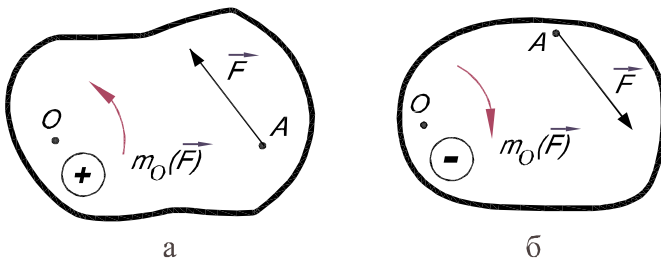


Рисунок 3.3



Якщо на тіло діє плоска система сил, то вектори момен-тів усіх сил будуть перпен-дикулярні до цієї площини, а, отже, між собою паралельні. Тому моменти додають алгебраїчно та їх можна вважати скалярними величинами, які відрізняються лише величиною та знаками. Отже доцільно ввести алгебраїчну величину моменту сили відносно точки, яка дорівнює взятому зі знаком "+" або "-" добут-ку модуля сили на її плече віднос-но цієї точки:

$$m_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (3.3)$$

Уважатимемо момент **додатнім**, якщо сила намагається обертати тіло навколо точки проти ходу годинникової стрілки (Рис. 3.3, а) і **від'ємним** - якщо за ходом годинникової стрілки (Рис. 3.3, б).

Одиниці моменту сили : 1 Н·м, 1 кН·м, 1 кгс·м.

Зауважимо, що  $Fh = AB \cdot h = 2S_{\Delta OAB}$ . Тобто

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = 2S_{\Delta OAB}. \quad (3.4)$$

Модуль моменту сили відносно центра дорівнює подвійній площі трикутника, побудованого на векторах  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ .

**Якщо лінія дії сили проходить через центр, то момент сили відносно цього центра буде дорівнювати нулю.**

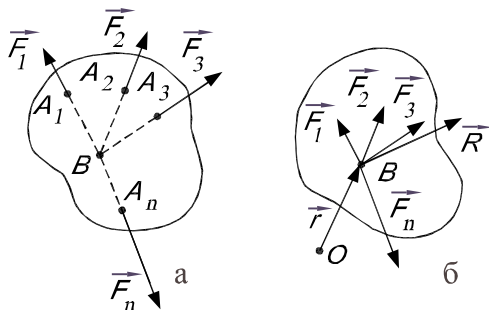
Момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні сили вздовж її лінії дії, оскільки незмінним залишається плече сили відносно центра.

### 3.2. Теорема Варіньона для системи збіжних сил

**Теорема 1.** Момент рівнодійної просторової системи збіжних сил відносно деякого центра, дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно того самого центра.

**Доведення.** На тіло діє просторова система збіжних сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , лінії дій яких перетинаються в точці  $B$  (Рис. 3.4, а).

Замінімо дану систему сил еквівалентною системою, усі сили якої прикладені в точці  $B$  (Рис. 3.4, б). Рівнодійну систему, прикладену в тій же точці  $B$ , позначимо  $\vec{R}$ . Точку  $O$ , відносно якої будемо брати моменти всіх сил, назвемо центром моментів. Знайдемо момент рівнодійної  $\vec{R}$  відносно центра  $O$ .



**Рисунок 3.4**

Згідно з формулою (3.1):

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{R},$$

де  $\vec{r} = \overline{OB}$  – радіус-вектор точки прикладання всіх сил системи і рівнодійної відносно центра  $O$ . Відомо, що  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ .

Тоді:

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \vec{r} \times \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i).$$

Отже, одержали рівність:

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i), \quad (3.5)$$

Теорему доведено.

Для плоскої системи збіжних сил теорему Варіньона записують так:

$$m_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i). \quad (3.6)$$

**Теорема 2.** Момент рівнодійної плоскої системи збіжних сил відносно деякого центра, що лежить у площині дії сил, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цього центра.

Розглянемо приклад на застосування теореми Варіньона.

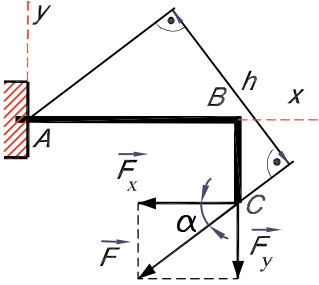


Рисунок 3.5

**Задача 3.1.** На зігнутий під прямим кутом стержень  $ABC$  діє сила  $\vec{F}$ , як показано на Рис. 3.5. Знайти величину моменту сили  $\vec{F}$  відносно точки  $A$ , якщо  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ .

**Розв'язок**

Для визначення моменту сили відносно точки  $A$  використаємо теорему Варіньона. Розкладемо силу  $\vec{F}$  на дві складові: горизонтальну

$F_x = F \cos \alpha$  і вертикальну  $F_y = F \sin \alpha$ .

Тоді згідно з теоремою 2 одержимо:

$$m_A(\vec{F}) = -F_x \cdot a - F_y \cdot 2a = -aF \cos \alpha - 2aF \sin \alpha.$$

Перевіримо правильність розв'язку задачі. Оскільки

$m_A(\vec{F}) = -Fh$ , то враховуючи, що  $h = BC \cos \alpha + AB \sin \alpha = a \cos \alpha + 2a \sin \alpha$ , отримаємо такий самий результат.

Наведемо ще третій варіант розв'язку задачі. Надавши системі координат ортонормований базис  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , запишемо радіус-вектор  $\vec{r}_C$  точки прикладання сили  $\vec{F}$  і саму силу так:

$$\begin{aligned} \vec{r}_C &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} = 2a \vec{i} - a \vec{j} + 0 \vec{k}, \\ \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -F \cos \alpha \vec{i} - F \sin \alpha \vec{j} + 0 \vec{k}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\vec{m}_A(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & -a & 0 \\ -F \cos \alpha & -F \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = (-2aF \sin \alpha - aF \cos \alpha) \vec{k}.$$

Вектор  $\vec{m}_A(\vec{F})$  направлений вздовж осі  $z$  протилежно до базисного вектора  $\vec{k}$ .

### 3.3. Рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил можна виразити не лише через проєкції цих сил, а і через їх моменти. Покажемо, що для **рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо виконання умов:**

$$\sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.7)$$

де  $B$  і  $C$  довільні точки, що не лежать на одній прямій з точкою  $A$ , в якій перетинаються лінії дій сил. Необхідність цих умов виникає з того, що якщо  $\sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) \neq 0$ , то, як видно із (3.6),

$m_B(\vec{R}_i) \neq 0$ , а це значить  $\vec{R}_i \neq 0$ , і рівновага неможлива. Доведемо достатність цих умов.

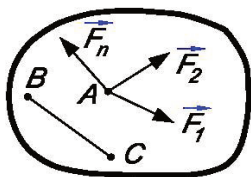


Рисунок 3.6

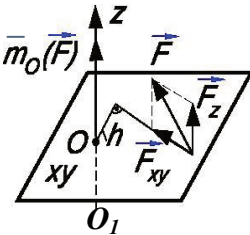
Якщо умови (3.7) виконуються, то за теоремою Варіньона  $\vec{m}_B(\vec{R}) = 0$  і  $\vec{m}_C(\vec{R}) = 0$ , що можливо або коли  $\vec{R} = 0$ , або коли лінія дії сили  $\vec{R}$  проходить через точки  $B$  і  $C$  одночасно. Проте в нашому випадку останнє неможливо, оскільки рівнодійна збіжних сил

повинна проходити через точку  $A$  (Рис. 3.6), а пряма  $BC$ , за прийнятою умовою, через точку  $A$  не проходить. Звідси витікає, що у разі виконання умов (3.7) рівнодійна  $\vec{R} = 0$ , тобто система сил перебуває у рівновазі. Виконання лише однієї з умов (3.7) для рівноваги системи недостатньо.

### 3.4. Момент сили відносно осі

**Моментом сили відносно осі називають алгебраїчну величину, що дорівнює моменту проекції сили на площину, перпендикулярну до даної осі, відносно точки перетину осі з цією площиною.**

Нехай до тіла в деякій точці  $A$  прикладена сила  $\vec{F}$  (Рис. 3.7).



Визначимо момент сили  $\vec{F}$  відносно осі  $O_1z$ . Проведемо через точку  $A$  площину  $xy$ , перпендикулярну до осі  $O_1z$ . Точку перетину площини  $xy$  з віссю  $O_1z$  позначимо  $O$ . Спроектуємо силу  $\vec{F}$  на  $xy$  і одержимо силу  $\vec{F}_{xy} = np_{xy}\vec{F}$ . площину

**Рисунок 3.7**

Друга складова сили  $\vec{F}$  – це  $\vec{F}_z$ , причому  $\vec{F}_z \parallel Oz$ . Згідно з означенням

$$m_z(\vec{F}) = m_o(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h. \quad (3.8)$$

Отже, щоб визначити момент сили відносно осі, необхідно:

- спроектувати цю силу на площину, перпендикулярну до осі;
- знайти точку перетину осі з цією перпендикулярною площиною;
- визначити алгебраїчну величину моменту одержаної проекції відносно точки перетину осі з площиною.

**Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:**

1. Сила паралельна до осі ( $\vec{F}_z \parallel Oz, np_{xy}\vec{F}_z = 0$ );
2. Лінія дії сили перетинає вісь ( $h = 0$ ).

Ці дві умови еквівалентні одній умові. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, коли сила і вісь лежать в одній площині.

Момент сили відносно осі **додатний**, якщо, дивлячись з кінця осі, бачимо, що проекція цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, намагається обертати тіло навколо осі проти ходу годинникової стрілки (Рис. 3.8, а). Якщо обертання відбувається у напрямі руху годинникової стрілки, то момент сили відносно осі буде **від'ємним** (Рис. 3.8, б).

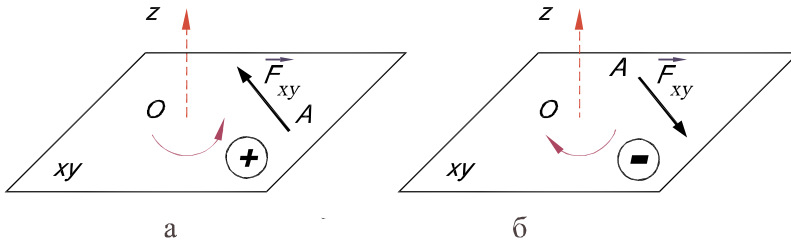


Рисунок 3.8

### 3.5. Залежність між моментом сили відносно точки і осі, що проходить через цю точку

**Теорема.** Проекція вектора-моменту сили відносно точки на вісь, що проходить через цю точку, дорівнює моменту сили відносно цієї осі.

**Доведення.** Сила  $\vec{F}$  прикладена в точці  $A$  простору. Виберемо довільну точку  $O$  і проведемо осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (Рис. 3.9). Визначимо момент сили  $\vec{F}$  відносно осі  $Oz$  і відносно точки  $O$  на ній.

Відомо, що

$$\begin{aligned}
 & |m_O(\vec{F})| = Fh = 2S_{\Delta OAB}, \\
 \text{а} \quad & |m_z(\vec{F})| = |m_O(\vec{F}_{xy})| = F_{xy}h = 2S_{\Delta OA_1B_1} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

З курсу елементарної геометрії відомо, що

$$\begin{aligned}
 S_{\Delta OA_1B_1} &= np_{xy}S_{OAB}, \\
 S_{\Delta OA_1B_1} &= S_{\Delta OAB} \cos \gamma, \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

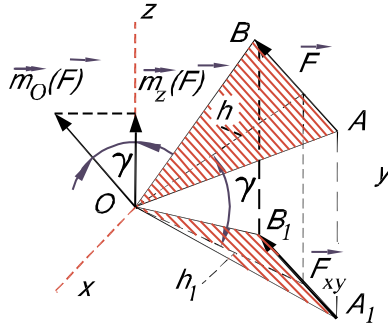


Рисунок 3.9

де  $\gamma$  – кут між площинами цих трикутників, а отже, і кут між перпендикулярами до цих площин.

Оскільки  $\vec{m}_O(\vec{F}) \perp (OAB)$ , а  $(Oz) \perp (OA_1B_1)$ , то  $\angle(\vec{m}_O(\vec{F}), Oz) = \gamma$ .

Враховуючи рівності (3.9) і (3.10), одержимо

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cos \gamma.$$

Знак  $m_z(\vec{F})$  повністю визначається знаком  $\cos \gamma$ .

Оскільки  $|\vec{m}_O(\vec{F}) \cos \gamma| = n p_{Oz} \vec{m}_O(\vec{F})$ , то

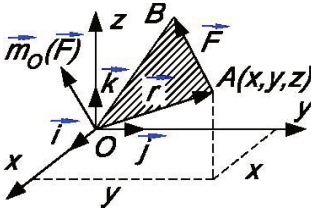
$$m_z(\vec{F}) = n p_{Oz} \vec{m}_O(\vec{F}), \quad (3.11)$$

що й треба було довести.

### 3.6. Момент сили відносно координатних осей

Нехай на тіло діє сила  $\vec{F}$ , прикладена в точці  $A$  (Рис.3.10). Виберемо довільну точку  $O$  та зв'яжемо з нею праву декартову систему координат з ортонормованим базисом

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . Визначимо момент сили  $\vec{F}$  відносно осей цієї системи координат. Для цього запишемо вираз для моменту сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$ . Згідно з (3.1)



$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

**Рисунок 3.10**

Запишемо розклад векторів  $\vec{F}$  і  $\vec{r}$  за векторами базису  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}; \quad \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

де  $x = r_x$ ,  $y = r_y$ ,  $z = r_z$  – координати точки  $A$ .

Тоді

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи визначник, отримуємо:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x) \quad (3.12)$$

Вектор-момент  $\vec{m}_O(\vec{F})$  також представимо через його проєкції на осі координат:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = n_{p_{Ox}} \vec{m}_O(\vec{F}) \vec{i} + n_{p_{Oy}} \vec{m}_O(\vec{F}) \vec{j} + n_{p_{Oz}} \vec{m}_O(\vec{F}) \vec{k}.$$

Оскільки

$$n_{p_{Ox}} \vec{m}_O(\vec{F}) = m_x(\vec{F}); \quad n_{p_{Oy}} \vec{m}_O(\vec{F}) = m_y(\vec{F}); \quad n_{p_{Oz}} \vec{m}_O(\vec{F}) = m_z(\vec{F}),$$

то

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = m_x(\vec{F}) \vec{i} + m_y(\vec{F}) \vec{j} + m_z(\vec{F}) \vec{k}. \quad (3.13)$$



Прирівнюючи праві частини рівнянь (3.13) і (3.12), одержимо

$$\begin{cases} m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; \\ m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z; \\ m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \end{cases} \quad (3.14)$$

### Контрольні запитання

1. Що називають моментом сили відносно точки? Якими одиницями його вимірюють у системі СІ?

2. Як визначають напрям і модуль моменту сили відносно точки?

3. Чи змінюється момент сили відносно деякої точки у разі переносу сили вздовж лінії її дії?

4. У якому випадку момент сили відносно даної точки дорівнює нулю?

5. Дайте визначення моменту сили відносно осі.

6. Як визначити плече сили відносно осі?

7. У якому випадку момент сили відносно даної осі дорівнює нулю?

8. Сформулюйте теорему Варіньона для просторової та плоскої систем збіжних сил.

9. Як визначити момент сили відносно координатних осей?

10. Запишіть залежність між моментом сил відносно точки та осі.

11. Коли момент сили відносно точки (осі) додатний і коли від'ємний?

12. Напишіть рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил.

## Глава 4. Теорія пар сил

### 4.1. Додавання двох паралельних сил

#### Сили спрямовані в один бік

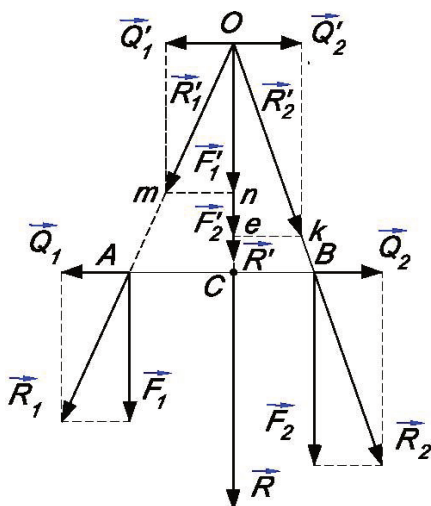


Рисунок 4.1

Нехай до абсолютно твердого тіла в точках  $A$  і  $B$  прикладені дві паралельні сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , спрямовані в один бік (Рис. 4.1).

Знайдемо їх рівнодійну. Для цього в точках  $A$  і  $B$  до тіла прикладемо дві однакові за величиною та протилежні за напрямком сили  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$  що діють по прямій  $AB$ .

Оскільки  $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2$ , то відповідно до аксіом 1 і 2 статички система сил  $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$

еквівалентна 0, а система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$  еквівалентна системі  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ . Додаючи попарно сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{Q}_1$ ,  $\vec{F}_2$  і  $\vec{Q}_2$ , одержимо  $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{Q}_1$  і  $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{Q}_2$ . Перенесемо сили  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$  вздовж лінії дії в точку їх перетину  $O$ .  $\vec{R}'_1 = \vec{R}_1$  і  $\vec{R}'_2 = \vec{R}_2$ . Розкладемо тепер силу  $\vec{R}'_1$  на складові  $\vec{Q}'_1 = \vec{Q}_1$  і  $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1$ , а силу  $\vec{R}'_2$  – на складові  $\vec{Q}'_2 = \vec{Q}_2$  і  $\vec{F}'_2 = \vec{F}_2$ . Сили  $\vec{Q}'_1$  і  $\vec{Q}'_2$  зрівноважені, тому їх вилучили.

Оскільки сили  $\vec{F}'_1$  і  $\vec{F}'_2$  спрямовані по одній прямій в один бік, то їх рівнодійна  $\vec{R}' = \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  спрямована по тій самій прямій у тому самому напрямку. Перенесемо силу  $\vec{R}$  вздовж лінії її дії в

точку  $C$  відрізка  $AB$ . Одержимо силу  $\vec{R}' = \vec{R}$ . Це означає, що сила  $\vec{R}$  – рівнодійна сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (4.1)$$

Знайдемо точку прикладання рівнодійної  $\vec{R}$  сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ . З подібності трикутників  $OAC$  і  $Omn$ ,  $OCB$  і  $Oek$  запишемо:

$$\frac{OC}{CB} = \frac{F_2}{Q_2} \text{ і } \frac{OC}{AC} = \frac{F_1}{Q_1}.$$

Оскільки  $Q_1 = Q_2$ , то  $F_1 \cdot AC = F_2 \cdot CB$ . Звідси, враховуючи властивість пропорції, маємо:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R}. \quad (4.2)$$

**Отже рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік, паралельна до цих сил, спрямована в той самий бік, що й складові сили. Ця рівнодійна дорівнює сумі складових сил, а лінія її дії поділяє відстань між точками прикладання цих сил внутрішньо на частини, обернено пропорційні до цих сил.**

**Примітка.** 1. З доведеного випливає, що довільну силу можна також розкласти на дві паралельні сили.

2. Якщо  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ , то  $AC = CB$ .

#### Сили, спрямовані в протилежні боки

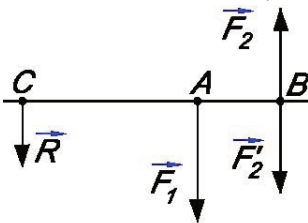


Рисунок 4.2

Нехай паралельні сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  спрямовані в різні боки, і  $F_1 > F_2$  (Рис. 4.2). Знайдемо рівнодійну сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ . Для цього відповідно до примітки 1 розкладаємо силу  $\vec{F}_1$  на дві паралельні сили: силу  $F_2'$ , прикладену в точці B,

приймаючи  $F_2' = F_2$ , та силу  $\vec{R}$ , прикладену в точці  $C$ . Сила  $\vec{F}_1$  є рівнодійною сил  $\vec{F}_2'$  і  $\vec{R}$ , тому сила  $\vec{F}_1$  еквівалентна системі сил  $(\vec{F}_2', \vec{R})$ . Згідно з (4.1)  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2' + \vec{R}$ , звідси

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2'. \quad (4.3)$$

Оскільки сила  $\vec{F}_1$  еквівалентна системі сил  $(\vec{F}_2', \vec{R})$ , то система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2')$  еквівалентна системі сил  $(\vec{F}_2', \vec{F}_2', \vec{R})$ . Але  $(\vec{F}_2', \vec{F}_2')$  еквівалентна 0, тому  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2')$  еквівалентна  $\vec{R}$ . Оскільки сила  $\vec{R}$  – рівнодійна сил  $\vec{F}_2'$  і  $\vec{R}$ , то із формули (4.2) одержимо:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (4.4)$$

**Отже рівнодійна двох паралельних, не однакових за модулем та протилежно спрямованих сил, є паралельна до них, спрямована у бік більшої сили й дорівнює різниці складових сил. Лінія дії рівнодійної проходить через точку, що лежить зовні відрізка АВ з боку більшої сили та поділяє відстань між точками прикладання сил зовнішньо на відрізки, обернено пропорційні до цих сил.**

**Сили, рівні за модулем і спрямовані протилежно одна одній**

Розглянемо дві рівні за модулем і спрямовані протилежно паралельні сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , прикладені до тіла в точках  $A$  і  $B$  (Рис. 4.3).

Згідно з (4.3) при  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$  одержуємо  $\vec{R} = 0$ . Хоча рівнодійна цих сил дорівнює нулю, однак тіло під дією такої системи сил, як відомо із практики, не буде знаходитись в рівновазі. Такі дві сили намагаються обернути тіло.

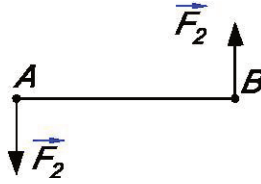


Рисунок 4.3

Цей випадок особливий, оскільки такі дві сили є якісно новим елементом статyki, який називають **парою сил**.

## 4.2. Пара сил

Систему двох однакових за модулем, паралельних, протилежно спрямованих сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, називають **парою сил** (або просто **парою**).

Нехай до деякого тіла прикладена пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  (Рис. 4.4).

Згідно з означенням пари сил  $\vec{F} = -\vec{F}'$ .

**Елементи пари:** сили що складають пару; плече пари; площина дії пари. **Плече пари  $h$**  – це найкоротша відстань між лініями дії сил пари. **Площина дії пари** - це площина, в якій розміщені сили пари. **Система пар сил** - це сукупність пар сил, прикладених до одного твердого тіла. Пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  не має рівнодійної, бо геометрична сума цих сил дорівнює нулю.

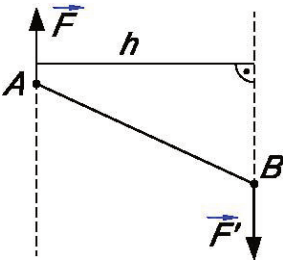


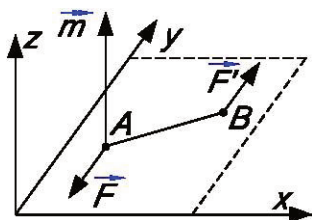
Рисунок 4.4

Пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  не є системою зрівноважених сил. Згідно з аксіомою 1 дві однакові за модулем і протилежні за напрямком сили будуть зрівноваженою системою сил, **лише тоді, коли вони мають спільну лінію дії**.

Пара сил, що діє на тіло, намагається обернути його. Мірою обертальної дії сили в статиці є момент. Тому дію пари сил на тіло характеризують моментом.

### 4.3. Момент пари сил

Моментом пари сил називають вектор, який дорівнює векторному добутку вектора, що з'єднує точки прикладання сил, і вектора однієї сили пари:



$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}'. \quad (4.5)$$

Вектор-момент пари спрямовують перпендикулярно до площини дії пари так, щоб із його кінця було видно намагання пари сил обернути тіло проти ходу годинникової стрілки (Рис. 4.5).

Рисунок 4.5

Алгебраїчним моментом пари сил називають взятий зі знаком "+" або "-" добуток однієї з сил пари на плече пари:

$$m = \pm Fh. \quad (4.6)$$

Момент пари сил вважаємо додатнім, якщо пара сил намагається обернути тіло проти ходу годинникової стрілки і від'ємним, якщо пара сил намагається обернути тіло за ходом годинникової стрілки.

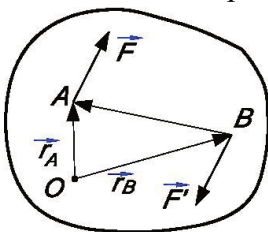


Рисунок 4.6

**Теорема.** Сума моментів сил пари відносно довільного центра в просторі є величиною сталою для даної пари й дорівнює моменту цієї пари.

**Доведення.** Нехай задано пару сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  (Рис. 4.6). Оскільки дія пари на тіло спричиняє обертання, знайдемо суму моментів сил пари відносно центра  $O$ , довільно розміщеного в просторі. Згідно з (3. 1) одержимо:

$$\begin{aligned}\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') &= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = \\ &= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{m}.\end{aligned}$$

Теорему доведено.

Залишається нез'ясованим питання про точку прикладання вектора-моменту пари сил. Оскільки момент пари сил не залежить від вибору центра моментів сил пари, то можна допустити, що вектор-момент пари сил можна прикладати в будь-якій точці простору, тобто вважати його вільним вектором. Це буде доведено за допомогою теорем про еквівалентність пар.

#### 4.4. Еквівалентність пар сил

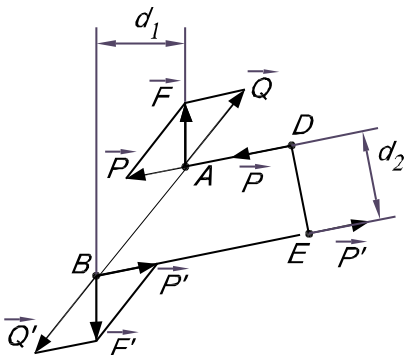


Рисунок 4.7

Доведення . На абсолютно тверде тіло діє пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  (Рис. 4.7), плече якої  $d_1$ .

Проведемо в площині дії пари через довільні точки  $D$  і  $E$  дві паралельні прямі до перетину їх з лініями дії пари  $(\vec{F}, \vec{F}')$  в точках  $A$  та  $B$  і прикладемо сили  $\vec{F}$  та  $\vec{F}'$  у цих точках (початково сили  $\vec{F}$  та  $\vec{F}'$  можуть бути прикладені в довільних точках на лініях дії цих сил). Відстань між прямими  $AD$  і  $BE$  позначимо  $d_2$ . Розкладемо силу  $\vec{F}$  по напрямках  $BA$  та  $DA$  на

Розглянемо теореми, з яких випливають основні властивості пари сил та які встановлюють умови їх еквівалентності.

**Теорема 1.** Дія пари сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо пару сил замінити будь-якою другою парою сил, що лежить у тій же площині й має той же момент.

сили  $\vec{Q}$  та  $\vec{P}$ , а силу  $\vec{F}'$  – по напрямках  $AB$  та  $BE$  на сили  $\vec{Q}'$  та  $\vec{P}'$ . При цьому  $\vec{P} = -\vec{P}'$ ,  $\vec{Q} = -\vec{Q}'$ . Сили  $\vec{Q}$  та  $\vec{Q}'$ , як зрівноважені, можна вилучити. Тоді пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  буде замінена парою  $(\vec{P}, \vec{P}')$  з іншим плечем та іншими силами, які можна прикласти в точках  $D, E$ . У силу довільності вибору точок  $D, E$  та напрямків прямих  $AD$  і  $BE$ , пара сил  $(\vec{P}, \vec{P}')$  може бути розміщена в площині дії де завгодно.

Доведемо, що моменти пар  $(\vec{P}, \vec{P}')$  та  $(\vec{F}, \vec{F}')$  однакові. Оскільки сила  $\vec{F}$  є рівнодійною сил  $\vec{Q}$  та  $\vec{P}$ , то за теоремою Варіньона запишемо

$$m_B(\vec{F}) = m_B(\vec{P}) + m_B(\vec{Q}).$$

Але

$$m_B(\vec{F}) = Fd_1, \quad m_B(\vec{P}) = Pd_2, \quad m_B(\vec{Q}) = 0.$$

Звідси  $Fd_1 = Pd_2$ , тобто моменти пар однакові і теорема доведена.

З доведеної теореми випливають такі **властивості пар сил**:

1. Задану пару сил, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна переносити куди завгодно в площині дії пари;
2. У заданій парі, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна довільно змінювати модулі сил або довжину плеча, зберігши незмінним її момент.

Звідси витікає, що дві пари, які лежать в одній площині і мають однакові моменти, **еквівалентні**.



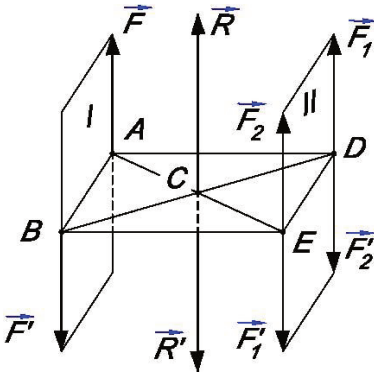


Рисунок 4.8

**Теорема 2.** Дія пари сил на тверде тіло не змінюється, якщо пару сил перенести із однієї площини в другу, їй паралельну.

**Доведення.** Розглянемо пару сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$ , що лежить у площині I (Рис. 4.8). Проведемо площину II і візьмемо на ній відрізок  $DE$ , який дорівнює відрізку  $AB$  і паралельний до нього. У точках  $D$  та  $E$  прикладемо чотири попарно

зрівноважені сили  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$ ;  $\vec{F}'_1 = \vec{F}'_2 = \vec{F}'$ . Фігура  $ABED$  є паралелограмом, діагоналі якого точка  $C$  ділить навпіл. Складемо тепер паралельні сили  $\vec{F}$  та  $\vec{F}_2$ , замінимо їх рівнодією  $\vec{R}$ , що прикладена в точці  $C$ , при цьому  $\vec{R} = 2\vec{F}$ . Сили  $\vec{F}'$  та  $\vec{F}'_2$  замінимо силою  $\vec{R}'$ , що прикладена посередині відрізка  $BD$ , тобто в точці  $C$   $\vec{R}' = 2\vec{F}' = \vec{R}$ . Сили  $\vec{R}$  та  $\vec{R}'$  зрівноважені і їх можна вилучити. Таким чином, пара  $(\vec{F}, \vec{F}')$  замінена парою  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ , що лежить у площині II. З доведеної теореми виходить, що дві пари, які лежать в паралельних площинах і мають однакові моменти, **еквівалентні**.

#### 4.5. Додавання пар сил

##### Геометричне визначення моменту результуючої пари сил

Встановимо правило додавання пар сил, що лежать у площинах, які перетинаються. Це правило випливає з такої теореми.

**Теорема.** Дві пари сил, які лежать у площинах, що перетинаються, еквівалентні одній парі, вектор-момент якої дорівнює геометричній сумі векторів-моментів даних пар.

**Доведення.** Нехай пари сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$  і  $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$  з моментами  $\vec{m}_1$  і  $\vec{m}_2$  розміщені в площинах  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (Рис. 4.9), тобто система  $\{(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2)\}$  еквівалентна  $\{(\vec{P}_1, \vec{P}'_1), (\vec{P}_2, \vec{P}'_2)\}$ . Додамо сили, прикладені в точках  $A$  і  $B$ . Одержимо  $\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$  і  $\vec{R}' = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$ . Зважаючи на те, що  $\vec{P}_1 = -\vec{P}'_1$  і  $\vec{P}_2 = -\vec{P}'_2$ , отримаємо  $\vec{R} = -\vec{R}'$ . Отже система пар  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$  і  $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$  є еквівалентною одній парі  $(\vec{R}, \vec{R}')$ . Знайдемо вектор-момент цієї пари:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{BA} \times \vec{R}' = \vec{BA} \times (\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2) = \\ &= \vec{BA} \times \vec{P}'_1 + \vec{BA} \times \vec{P}'_2 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 \end{aligned}$$

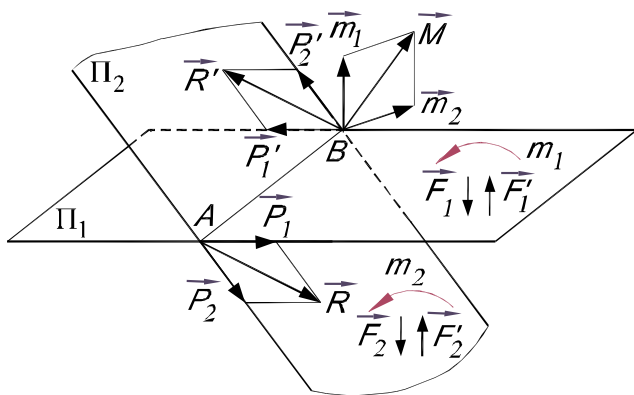


Рисунок 4.9

Отже

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$$

Теорему доведено.

Аналогічно можна додати  $n$  пар сил у просторі.

У результаті одержимо одну пару сил, вектор-момент якої дорівнює геометричній сумі векторів-моментів складових пар сил, а саме:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \quad (4.7)$$

## Аналітичне визначення моменту результуючої пари сил

Спроектуємо рівність (4.7) на осі прямокутної декартової системи координат і використаємо теорему про проекцію сумарного вектора на вісь. Одержимо проекції моменту результуючої пари сил на осі системи координат:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_{ix}; \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_{iy}; \quad M_z = \sum_{i=1}^n m_{iz},$$

де  $M_x, M_y, M_z$  – проекції моменту результуючої пари  $\vec{M}$  на відповідні осі координат;  $m_{ix}, m_{iy}, m_{iz}$  – проекції моменту пари  $\vec{m}_i$  на осі системи координат.

Відомо, що вектор  $\vec{M}$  можна подати у вигляді

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}.$$

Модуль та напрямок вектора визначаються за формулами:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

$$\cos \angle(\vec{M}, \vec{i}) = \frac{M_x}{M}; \quad \cos \angle(\vec{M}, \vec{j}) = \frac{M_y}{M}; \quad \cos \angle(\vec{M}, \vec{k}) = \frac{M_z}{M}.$$

### Додавання пар сил на площині

Як впливає з попереднього, щоб додати пари сил на площині необхідно додати їх моменти. Відомо, що вектори-моменти пар, розміщених в одній площині, є паралельними і тому додаються алгебраїчно. Отже, **момент результуючої пари плоскої системи пар дорівнює сумі алгебраїчних моментів складових пар:**

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \tag{4.8}$$

## 4.6. Умови рівноваги пар сил

### Геометрична умова рівноваги просторової системи пар сил

Нехай на тіло діє  $n$  пар сил, довільно розміщених у просторі, вектори-моменти яких дорівнюють  $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$ .

У підрозділі 4.5 було доведено, що така система пар сил еквівалентна одній парі сил, вектор-момент якої визначають за рівнянням (4.7).

Очевидно, що тіло під дією системи пар сил перебуває в рівновазі, якщо вектор-момент результуючої пари буде дорівнювати нулю:  $\vec{M} = 0$ .

Цю умову рівноваги, враховуючи формулу (4.7), запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \vec{m}_i = 0. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) є геометричною умовою рівноваги просторової системи пар, яку можна сформулювати так: **просторова система пар сил буде перебувати у рівновазі тоді й тільки тоді, коли вектор-момент результуючої пари, або геометрична сума векторів-моментів складових пар, буде дорівнювати нулю.**

### Аналітичні умови рівноваги просторової системи пар сил

З умови (4.9) одержуємо, що у разі рівноваги просторової системи пар сил  $M_x = M_y = M_z = 0$ , тобто

$$\sum_{i=1}^n m_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{iz} = 0. \quad (4.10)$$

Формули (4.10) є аналітичними умовами рівноваги просторової системи пар сил, які формулюють так: **просторова система пар сил перебуває у рівновазі тоді й тільки тоді, коли алгебраїчна сума проєкцій векторів-моментів складових пар на три взаємно перпендикулярні осі координат дорівнює нулю.**

### **Умова рівноваги плоскої системи пар сил**

Умову рівноваги плоскої системи пар сил одержуємо з рівності (4.8).

**Плоска система пар сил буде перебувати у рівновазі тоді й тільки тоді, коли алгебраїчна сума моментів складових пар сил буде дорівнювати нулю:**

$$\sum_{i=1}^n m_i = 0. \quad (4.11)$$

### **Контрольні запитання**

1. Як визначають напрям і модуль рівнодійної двох паралельних сил, спрямованих в один бік?
2. Як визначають напрям і модуль двох паралельних протилежно спрямованих сил?
3. Що називають парою сил? Моментом пари сил?
4. Як визначають напрям і модуль вектор-моменту пари сил?
5. Чому дорівнює сума моментів сил пари відносно довільного центра?
6. Сформулюйте теореми про еквівалентність пар сил.
7. Які пари називають еквівалентними?
8. Що таке рівнодійна (результуюча) пара і як визначити її величину? (Геометричне і аналітичне визначення).

9. Сформулюйте геометричну умову рівноваги просторової системи пар сил.

10. Запишіть аналітичні умови рівноваги просторової та плоскої системи пар сил.

## Глава 5. Зведення довільної системи сил до заданого центра

Як було зазначено, однією з двох основних задач статyki є зведення системи сил, які діють на абсолютно тверде тіло, до простішого вигляду.

Зупинимося на методі зведення довільної незбіжної системи сил до заданого центра. Цей метод ґрунтується на використанні леми Пуансо про паралельне перенесення сили.

### 5.1. Лема про паралельне перенесення сили

**Лема Пуансо.** Не змінюючи дії сили, прикладеної в деякій точці тіла, на це тіло, її можна переносити паралельно самій собі в іншу довільну точку тіла, додавши при цьому пару сил з моментом, який дорівнює моменту заданої сили відносно нової точки.

**Доведення.** Нехай у точці  $A$  твердого тіла прикладена сила  $\vec{F}$  (Рис. 5.1, а). Прикладемо в точці  $B$  систему двох взаємозрівноважених сил ( $\vec{F}'$ ,  $\vec{F}''$ ) (Рис. 5.1, б). При цьому  $F' = F'' = F$  і  $\vec{F}' \parallel \vec{F}'' \parallel \vec{F}$ .

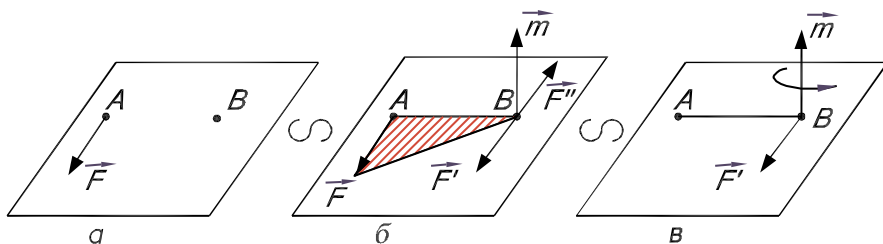


Рисунок 5.1

Тоді сила  $\vec{F}$  еквівалентна системі сил ( $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$ ,  $\vec{F}''$ ). Але сили  $\vec{F}$  і  $\vec{F}''$  утворюють пару сил, причому момент пари  $\vec{m}$  дорівнює моменту даної сили  $\vec{F}$  відносно нової точки  $B$ :

$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \vec{m}_B(\vec{F}).$$

Лему доведено.

## 5.2. Зведення довільної системи сил.

### Головний вектор і головний момент системи

На підставі леми Пуансо доведемо основну теорему статики.

**Теорема 1.** Довільну систему сил можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, прикладеної у довільно вибраній точці (центрі зведення), і яку називають головним вектором даної системи сил, і однієї пари сил, момент якої називають головним моментом даної системи сил.

Доведення. Розглянемо систему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ . Виберемо за центр зведення довільну точку  $O$  (Рис. 5.2, а). Згідно з лемою Пуансо перенесемо всі сили у центр зведення  $O$ . У результаті система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , буде еквівалентною системі сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , прикладеній у точці  $O$ , і системі пар сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ ,  $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$ ,  $(\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$ , моменти яких  $\vec{m}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$ ,  $\vec{m}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)$ ,  $\vec{m}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)$  показано на рис. 5.2, б, де  $\vec{r}_i$  радіуси-вектори, проведені з центра зведення  $O$  до точок прикладання сил  $\vec{F}_i$ .

Одержану збіжну систему сил і систему пар сил можна замінити однією силою  $\vec{R}$  і однією парою сил з моментом  $\vec{M}_O$  (Рис. 5.2, в), тобто



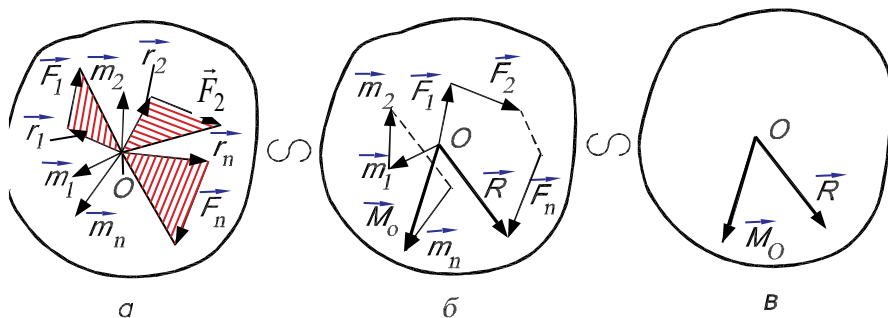


Рисунок 5.2

$$\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i ; \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Силу  $\vec{R}$  називають **головним вектором** системи сил.

Момент  $\vec{M}_O$  називають **головним моментом** системи сил відносно центра зведення  $O$ . Теорема доведена.

Вектори  $\vec{R}$  і  $\vec{M}_O$  називають елементами зведення. Як видно з (5.1) і (5.2), головний вектор **не залежить**, а головний момент **залежить** від вибору центра зведення.

### 5.3. Векторні умови рівноваги довільної системи сил

Згідно з основною теоремою статички довільна система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  при зведенні до заданого центра можна замінити простішою еквівалентною системою з однієї сили  $\vec{R}$  і однієї пари сил з моментом  $\vec{M}_O$ .

Зупинимось на другій задачі статички і визначимо умови, при яких довільна система сил еквівалентна нулю, тобто умови її рівноваги. Доведемо таку теорему.

**Теорема 2.** Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи і її головний момент відносно довільно вибраного центра зведення одночасно дорівнювали нулю:

$$\vec{R} = 0; \vec{M}_O = 0 \quad (5.3)$$

або

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Доведення.

**Необхідність.** Припустимо, що задана система сил перебуває у рівновазі. Покажемо, що тоді виконується умова (5.3). Дійсно, якщо, наприклад,  $\vec{R} \neq 0$ , але  $\vec{M}_O = 0$ , то задана система сил звелась би до рівнодійної  $\vec{R}' = \vec{R}$ , прикладеної в центрі зведення  $O$ , і рівноваги б не було. Якщо  $\vec{R} = 0$ , але  $\vec{M}_O \neq 0$ , то задана система сил звелась би до однієї пари і рівноваги також не було б. Коли  $\vec{R} \neq 0$  і  $\vec{M}_O \neq 0$ , то рівноваги також не було б, оскільки сила та пара сил взаємно не рівноважені.

**Достатність.** Нехай для довільної просторової системи сил виконуються умови (5.3). Очевидно, що така система сил еквівалентна нулю, тобто перебуває у рівновазі. Теорему доведено.

Умови (5.3) називають умовами рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі.

## 5.4. Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту довільної просторової системи сил

Для обчислення головного вектора і головного моменту довільної просторової системи сил використовуємо метод проекції. Для цього виберемо декартову систему координат (Рис. 5.3).

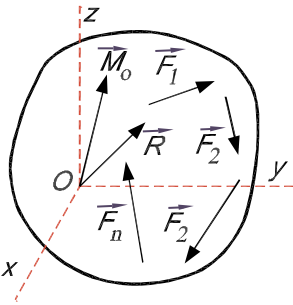


Рисунок 5.3

Проектуючи рівність (5.1) на осі вибраної системи координат, знайдемо проекції  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  головного вектора на осі:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} ; & R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} ; \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Формули (5.4) показують, що проекції головного вектора системи сил на осі системи координат дорівнюють алгебраїчним суммам проекцій усіх сил на ці осі.

Модуль і напрям головного вектора

$$\begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2} ; \\ \cos \angle(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R} ; \cos \angle(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R} ; \cos \angle(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{R} . \end{cases} \quad (5.5)$$

Проектуючи рівність (5.2) на осі координат, отримаємо

$$\begin{aligned} np_x \vec{M}_O &= M_{Ox} = \sum_{i=1}^n np_x \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_x(\vec{F}_i) ; \\ np_y \vec{M}_O &= M_{Oy} = \sum_{i=1}^n np_y \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_y(\vec{F}_i) ; \end{aligned}$$

$$np_z \vec{M}_O = M_{Oz} = \sum_{i=1}^n np_z \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_z(\vec{F}_i),$$

або

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n m_x(\vec{F}_i); M_{Oy} = \sum_{i=1}^n m_y(\vec{F}_i); M_{Oz} = \sum_{i=1}^n m_z(\vec{F}_i). \quad (5.6)$$

**Отже, проекція головного моменту відносно центра на будь-яку вісь, що проходить через цей центр, дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно осі.**

Модуль і напрям головного моменту

$$\left\{ \begin{aligned} M_O &= \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n m_x(\vec{F}_{ix})\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n m_y(\vec{F}_{iy})\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n m_z(\vec{F}_{iz})\right)^2}; \\ \cos \angle(\vec{M}_O, x) &= \frac{M_{Ox}}{M_O}; \cos \angle(\vec{M}_O, y) = \frac{M_{Oy}}{M_O}; \cos \angle(\vec{M}_O, z) = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \end{aligned} \right. \quad (5.7)$$

### 5.5. Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил

Із векторних умов рівноваги (5.3) довільної просторової системи сил випливає, що модулі головного вектора і головного моменту повинні дорівнювати нулю, а відповідно до (5.5) і (5.7) це відповідає шести алгебраїчним рівнянням, які виражають умови рівноваги цієї системи сил в аналітичній формі:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n F_{ix} &= 0; & \sum_{i=1}^n m_x(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum_{i=0}^n F_{iy} &= 0; & \sum_{i=1}^n m_y(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum_{i=0}^n F_{iz} &= 0; & \sum_{i=1}^n m_z(\vec{F}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отже, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил системи на три координатні осі та алгебраїчна сума їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

**Задача 5.1** . За допомогою коловорота (Рис. 5.4) рівномірно піднімають вантаж, вага якого  $G=900$  Н. Нехтуючи вагою коловорота, визначити тиск на підшипники  $A$  і  $B$  та силу  $F$ , яку потрібно прикласти перпендикулярно до рукоятки  $CD$  довжиною  $0,54$  м при її вертикальному положенні. Радіус барабана  $R = 0,12$  м.

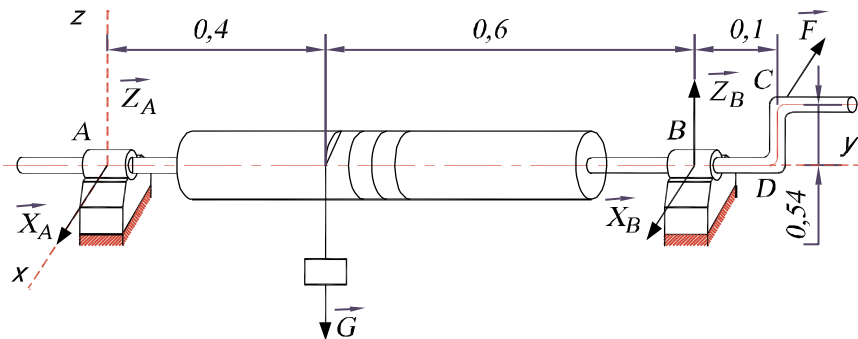


Рисунок 5.4

### Розв'язок

Розглядаючи коловорот як вільне тіло, прикладемо до нього активні сили  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$  і реакції  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Z}_A$ ,  $\vec{X}_B$ ,  $\vec{Z}_B$ , які виникають у підшипниках  $A$  і  $B$ . На коловорот діє довільна просторова система сил, яка повинна задовольняти умову рівноваги (5.8). Вибираємо осі координат, як показано на рис. 5.9, і складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A + X_B - F = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ – це рівняння задовольняється тотожно,}$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad Z_A + Z_B - G = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum m_x(\vec{F}_i) &= 0; & -G \cdot 0,4 + Z_B \cdot 1,0 &= 0, \\ \sum m_y(\vec{F}_i) &= 0; & G \cdot R - F \cdot 0,54 &= 0, \\ \sum m_z(\vec{F}_i) &= 0; & -X_B \cdot 1,0 + F \cdot 1,1 &= 0. \end{aligned}$$

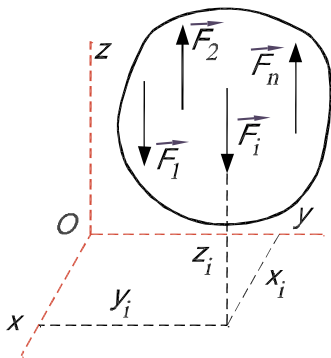
Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо невідому силу  $F$  і реакції в опорах  $A$  і  $B$ :  $F = 200H$ ;  $X_A = -20H$ ;  $Z_A = 540H$ ;  $X_B = 220H$ ;  $Z_B = 360H$ .

### 5.6. Аналітичні умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Якщо лінії дій усіх сил системи розміщені в різних площинах і паралельні між собою, то таку систему сил називають просторовою системою паралельних сил.

Із умов рівноваги (5.8) для довільної просторової системи сил отримаємо умови рівноваги просторової системи паралельних сил.

Нехай на тверде тіло діє просторова система паралельних сил (Рис. 5.5). Оскільки вибір координатних осей довільний, то можна вибрати координатні осі так, щоб вісь  $Oz$  була паралельна до сил.



При такому виборі координатних осей проекції кожної сили на осі  $x$  і  $y$  та їх моменти відносно осі  $z$  будуть дорівнювати нулю, тобто рівності

$$\sum F_{ix} \equiv 0; \quad \sum F_{iy} \equiv 0; \quad \sum m_z(\vec{F}_i) \equiv 0$$

перетворюються в тотожності.

Тому для системи паралельних сил з (5.8) отримаємо тільки три рівняння рівноваги:

Рисунок 5.5

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad \sum_{i=0}^n m_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=0}^n m_y(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.9)$$

Для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на вісь, паралельну цим силам, і алгебраїчні суми їх моментів відносно двох інших осей координат дорівнювали нулю.

### 5.7. Інваріанти зведення довільної просторової системи сил

Повернемося до аналізу основної теореми статики про зведення довільної просторової системи сил до заданого центра. З'ясуємо, як змінюється головний момент від зміни центра зведення та встановимо інваріанти зведення.

**Залежність головного моменту від вибору центра зведення**

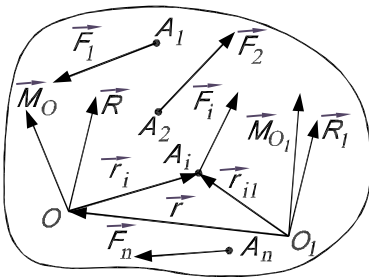


Рисунок 5.6

Припустимо, що в результаті зведення довільної просторової системи сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  до центра  $O$  отримано головний вектор  $\vec{R}$  і головний момент  $\vec{M}_O$ , а в результаті зведення до центра  $O_1$ , відповідно,  $\vec{R}_1$  і  $\vec{M}_{O_1}$  (Рис. 5.6). Головний вектор для будь-

якого центра зведення дорівнює геометричній сумі заданих сил, отже,  $\vec{R} = \vec{R}_1$ . Головний момент, як видно з формули (5.2), залежить від вибору центра зведення.

Знайдемо вирази головних моментів відносно двох центрів і порівняємо. Радіуси-вектори точок  $A_i$  прикладання заданих сил системи відносно цих центрів позначимо відповідно через  $\vec{r}_i$  і  $\vec{r}_{i1}$ . Тоді

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i); \quad \vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{i1} \times \vec{F}_i),$$

або

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i + \vec{r}) \times \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \vec{M}_O + \vec{r} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{M}_O + \vec{r} \times \vec{R}.$$

Отже

$$M_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O + M_{O_1}(\vec{R}). \quad (5.10)$$

Таким чином, головний момент системи сил відносно нового центра зведення  $O_1$  дорівнює геометричній сумі головного моменту відносно попереднього центра зведення  $O$  і моменту головного вектора, прикладеного у попередньому центрі зведення, відносно нового.

### Інваріанти системи сил

**Інваріантом зведення системи сил називають величину, яка не змінюється при переході від одного центра зведення до іншого.**

**Перший інваріант.** Головний вектор системи сил не залежить від центра зведення і є першим інваріантом (векторним):

$$\vec{R} = \text{invar}_1. \quad (5.11)$$

**Другий інваріант.** Скалярний добуток головного вектора та головного моменту системи сил для довільного центра зведення – величина стала і є другим інваріантом (скалярним).

Для доведення помножимо скалярно обидві частини рівності (5.10) на головний вектор. Тоді

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{R}_1 = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_1 + (\vec{r} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}_1.$$

Оскільки  $\vec{R}_1 = \vec{R}$  (перший інваріант), то вектори  $\vec{r} \times \vec{R}$  і  $\vec{R}_1$  взаємно перпендикулярні, а тому змішаний добуток  $(\vec{r} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}_1$  завжди дорівнює нулю й отримана рівність набуде вигляду

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{R}_1 = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \text{const}.$$

Тобто 
$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \text{invar}_2. \quad (5.12)$$



Другий інваріант можна представити і в іншій формі: проекція головного моменту на напрям головного вектора для довільного центра зведення є величина незмінна. Дійсно,

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = M_O \cdot R \cdot \cos \angle(\vec{M}_O, \vec{R}) = R \cdot np_R \vec{M}_O = const$$

Згідно з (5.11)  $|\vec{R}| = R = const$ , а тому

$$np_R \vec{M}_O = M_O \cdot \cos \angle(\vec{M}_O, \vec{R}) = const = invar. \quad (5.13)$$

### 5.8. Часткові випадки зведення довільної просторової системи сил

Залежно від значень головного вектора та головного моменту просторової системи сил можливі такі випадки зведення.

Випадок 1. Головний вектор не дорівнює нулю, а головний момент дорівнює нулю ( $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O = 0$ ). Систему сил зводять до рівнодійної, лінія дії якої проходить через центр зведення. Слід зазначити, що рівнодійна дорівнює і паралельна головному вектору сил. **Відмінність між рівнодійною системи сил та головним вектором системи сил полягає в тому, що рівнодійна має певне положення лінії дії, положення ж лінії дії головного вектора визначається вибором центра зведення.**

Випадок 2. Головний вектор дорівнює нулю, а головний момент не дорівнює нулю ( $\vec{R} = 0, \vec{M}_O \neq 0$ ). Систему сил зводять до пари сил, момент якої дорівнює  $\vec{M}_O$  і може бути обчислений за (5.7).

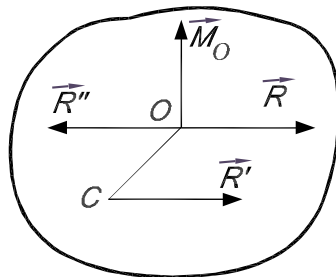


Рисунок 5.7

Випадок 3. Головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю ( $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$ ) і  $\vec{M}_O \perp \vec{R}$ . Систему сил також зводять до рівнодійної  $\vec{R}$ , яка не проходить через центр зведення  $O$ , а зміщена в точку  $C$ , що лежить на прямій, перпендикулярній до площині, в якій розташовані вектори  $\vec{R}$  і  $\vec{M}_O$ . Величина відрізка  $OC$ :

$$OC = \frac{M_O}{R}.$$

Дійсно, якщо  $\vec{M}_O \perp \vec{R}$ , то момент пари, яка зображена вектором  $\vec{M}_O$ , і сила  $\vec{R}$  лежать в одній площині (Рис. 5.7).

Тоді, вибравши сили пари  $\vec{R}'$ ,  $\vec{R}''$  рівними за модулем  $R$  і розмістивши їх так, як показано на Рис. 5.7, одержимо дві взаємно зрівноважені сили  $\vec{R}'$  і  $\vec{R}''$ . Отже систему сил замінимо однією рівнодійною  $\vec{R}' = \vec{R}$ , лінія дії якої проходить через точку  $C$ .

Випадок 4. Головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю

( $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$ ) і при цьому

вектор  $\vec{M} \parallel \vec{R}$  (Рис. 5.8, а).

Систему сил зводять до сили  $\vec{R}$  і пари ( $\vec{F}', \vec{F}''$ ) з моментом  $\vec{M}_O$ , яка лежить у площині,

перпендикулярній силі  $\vec{R}$  (Рис. 5.8, б). Таку сукупність сили та пари називають динамічним

**гвинтом**, а пряму, вздовж якої напрямлений вектор  $\vec{R}$  – **віссю гвинта**. Спрощення цієї системи надалі є неможливим.

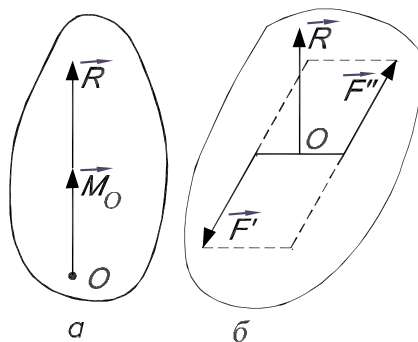
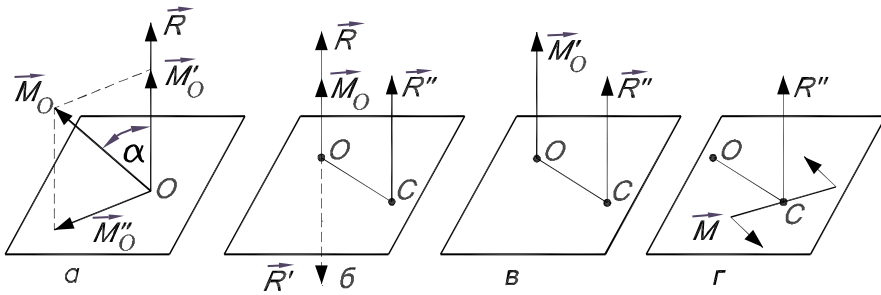


Рисунок 5.8

Випадок 5. Головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю ( $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$ ) і при цьому вектори  $\vec{R}$  і  $\vec{M}_O$  не перпендикулярні між собою та не паралельні (Рис. 5.9, а). Систему сил також зводять до **динамічного гвинта**, але вісь не буде проходити через центр зведення  $O$ .



**Рисунок 5.9**

Щоб довести це, розкладемо вектор  $\vec{M}_O$  на складові:  $\vec{M}'$  вздовж  $\vec{R}$  і  $\vec{M}''$  перпендикулярно до  $\vec{R}$ . При цьому  $M' = M_O \cos \alpha$ ,  $M'' = M_O \sin \alpha$ , де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{M}_O$  і  $\vec{R}$ . Пару, зображену вектором  $\vec{M}''$ , і силу  $\vec{R}$  можна, як у випадку 3 (Рис. 5.7), замінити однією силою  $\vec{R}'' = \vec{R}$ , що прикладена у точці  $C$  (Рис. 5.9, б). Таку систему сил замінюють силою  $\vec{R}$  і парою з моментом  $\vec{M}'$  ( $\vec{M}' \parallel \vec{R}$ ) (Рис.5.9, в). Причому вектор  $\vec{M}'$ , як вільний, можна також прикласти у точці  $C$ . У результаті дійсно одержимо динамічний гвинт, але його вісь (головна вісь) проходить через точку  $C$  (Рис. 5.9, г).

### Контрольні запитання

1. Сформулюйте лему Пуансо.
2. Сформулюйте основну теорему статyki.
3. Запишіть векторні умови рівноваги довільної системи сил.

4. Як визначають модуль і напрям головного вектора.
5. Як визначають модуль і напрям головного моменту.
6. Запишіть аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил.
7. Чим відрізняються рівнодійна системи сил і головний вектор системи сил?
8. Запишіть аналітичні умови рівноваги просторової системи паралельних сил.
9. Інваріанти зведення довільної просторової системи сил.
10. Сформулюйте часткові випадки зведення довільної просторової системи сил.

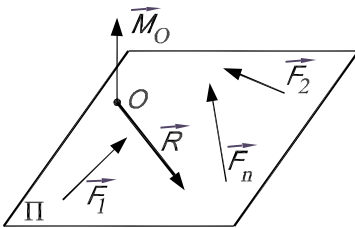
## Глава 6. Система сил, довільно розміщених по площині (довільна плоска система сил)

Систему сил, лінії дії яких довільно розміщені в одній площині, називають довільною плоскою системою сил.

Така система сил є частковим випадком довільної просторової системи сил. Оскільки досить багато практичних задач зводиться до цього випадку, зупинимося далі на аналізі довільної плоскої системи сил.

### 6.1. Визначення головного вектора та головного моменту довільної плоскої системи сил

Розглянемо довільну плоску систему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , розміщених у площині  $\Pi$  (Рис. 6.1). Виберемо за центр зведення довільну точку  $O$  цієї площини. Згідно з основною теоремою



статики (див. 5.2), задана система сил зведеться до однієї сили  $\vec{R}$ , яка є головним вектором і її визначають за залежністю (5.1), і до пари сил, момент  $\vec{M}_O$  якої дорівнює головному моменту і його визначають за (5.2).

Рисунок 6.1

Оскільки всі сили заданої системи розміщені в одній площині  $\Pi$ , то сила  $\vec{R}$  теж лежить у цій площині. Крім того, зводячи сили до центра  $O$ , дістанемо пари, які також розміщені в площині  $\Pi$ . Тоді й результуюча пара лежить у тій самій площині, а її вектор-момент  $\vec{M}_O$  перпендикулярний до неї. Отже для довільної плоскої системи сил головний вектор і головний момент взаємно перпендикулярні (Рис. 6.1).

Головний вектор  $\vec{R}$  довільної плоскої системи сил дорівнює геометричній сумі всіх сил системи та лежить у площині дії сил, а головний момент її відносно деякого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно цього ж центра:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \quad M_O = \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i). \quad (6.1)$$

Для обчислення головного вектора довільної плоскої системи сил використаємо метод проєкцій (див. 5.4).

У цьому разі проєкції головного вектора на осі координат, його модуль і напрям визначають за формулами:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad (6.2)$$

$$\cos \angle(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \angle(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}. \quad (6.3)$$

## 6.2. Зведення довільної плоскої системи сил

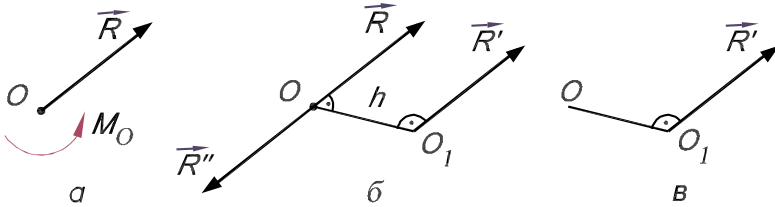
Зупинимося на можливих випадках зведення довільної плоскої системи сил до заданого центра.

### Зведення до рівнодійної

Доведемо, що коли головний вектор довільної плоскої системи сил не дорівнює нулю, то задана система сил еквівалентна одній силі, тобто має рівнодійну. При цьому можливі два випадки: а) коли головний момент дорівнює нулю  $M_O = 0$ ; б) коли головний момент не дорівнює нулю  $M_O \neq 0$ .

а) Нехай головний момент дорівнює нулю, а головний вектор системи сил не дорівнює нулю, тобто  $M_O = 0$ ,  $\vec{R} \neq 0$ . У цьому випадку систему сил зводять до рівнодійної, яка проходить через центр зведення.

б) Нехай для вибраного центра зведення головний момент системи сил  $i$  і головний вектор не дорівнюють нулю, тобто  $M_O \neq 0, \vec{R} \neq 0$  (Рис. 6.2, а).



**Рисунок 6.2**

Покажемо, що в цьому випадку система сил має рівнодійну.

Для цього пару сил з моментом  $M_O$  покажемо у вигляді пари  $(\vec{R}', \vec{R}'')$ , складові сили якої дорівнюють за модулем головному вектору  $\vec{R}$ , тобто  $R' = R'' = R$  (Рис. 6.2, б). При цьому силу  $\vec{R}''$  прикладемо в центрі зведення  $O$  і направимо протилежно силі  $\vec{R}$ . Сила  $\vec{R}'$  буде прикладена в точці  $O_1$ , яка розміщена на відстані  $h = \frac{|M_O|}{R}$  від лінії дії сили  $\vec{R}$  і відкладена в бік так, щоб момент пари  $(\vec{R}', \vec{R}'')$  збігався з моментом  $M_O$ . Тоді система сил  $(\vec{R}, \vec{R}'')$  є еквівалентна нулю і може бути вилучена. Таким чином, задана система сил еквівалентна одній силі  $\vec{R}'$  прикладеній у точці  $O_1$ . Ця сила і є рівнодійною, яку позначимо буквою  $\vec{R}$  (Рис. 6.2, в).

### **Зведення до пари сил**

Доведемо, що коли головний вектор  $\vec{R} = 0$ , а головний момент  $M_O \neq 0$ , довільну плоску систему сил зводять до пари сил.

Дійсно, це впливає з попереднього. Коли головний вектор системи  $\vec{R} = 0$ , система не має рівнодійної, і її зводять до пари сил, момент якої дорівнює головному моменту системи. Оскільки система сил у даному випадку еквівалентна парі сил, а сума моментів складових сил пари відносно центра не залежить від вибору цього центра, то, очевидно, і головний момент не залежить від центра зведення.

### Випадок рівноваги

Якщо головний вектор і головний момент дорівнюють нулю ( $\vec{R} = 0$ ,  $M_O = 0$ ), то система сил еквівалентна нулю, тобто сили, які складають систему, взаємно зрівноважені.

## 6.3. Аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил

### Основні умови рівноваги

Як було показано, необхідними й достатніми умовами рівноваги системи сил є рівність нулю головного вектора та головного моменту. Для плоскої системи сил ці умови мають вигляд:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad M_O = \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.4)$$

На основі формул (6.2) і (6.3) отримаємо аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.5)$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на дві координатні осі, що лежать у площині дії сил, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки цієї площини, дорівнювали нулю.

Рівності (6.5) називають **основними умовами рівноваги** довільної плоскої системи сил.



### Еквівалентні форми умов рівноваги

Можливі дві інші еквівалентні форми умов рівноваги довільної плоскої системи сил.

**Друга форма умов рівноваги:** для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно довільних трьох точок, які не лежать на одній прямій в площині дії сил, дорівнювали нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = 0; \quad (6.6)$$

Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не лежать на одній прямій.

Необхідність цих умов очевидна, оскільки у випадку рівноваги сума моментів сил системи відносно довільного центра дорівнює нулю.

Доведемо достатність умов (6.6) від супротивного. Нехай при одночасному виконанні умов (6.6) дана система сил не перебуває у рівновазі. Тоді вона повинна зводитися до рівнодійної або до пари сил. Припустимо, що система сил зводиться до рівнодійної. Тоді, згідно з (6.6) і теоремою Варіньона, ця рівнодійна повинна пройти через точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Але це неможливо, бо вказані точки не лежать на одній прямій. Зведення до пари сил також неможливо, бо момент рівнодійної пари, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно довільного центра, не залежить від вибору центра зведення і якщо виконується хоча б одна з умов (6.6), перетворюється в нуль. Отже, у разі виконання умов (6.6) задана система сил перебуває у рівновазі, що суперечить зробленому припущенню.

Другу форму умов називають ще **теоремою про три моменти**.

**Третя форма умов рівноваги:** для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно й достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил системи відносно двох довільних точок площини дії сил та алгебраїчна сума

проекцій усіх сил системи на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через вибрані точки, дорівнювали нулю, а саме

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0, \quad (6.7)$$

де  $x$  не  $\perp AB$ .

Необхідність і достатність умов (6.7) для рівноваги системи сил впливає з умов (6.4).

### Приклад на застосування рівнянь рівноваги

Задача 6.1. Ломаний стержень  $ACB$  довжиною  $5a = 10\text{м}$  закріплено так, як показано на Рис. 6.3. На стержень діють: пара сил з моментом  $M = 15\text{кНм}$  і зосереджені сили  $F = 10\text{кН}$  та  $Q = 10\text{кН}$ , які перпендикулярні до відповідних ділянок стержня.

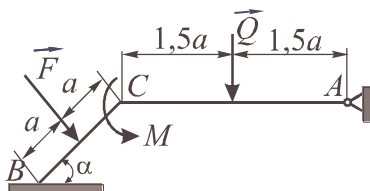


Рисунок 6.3

Нехтуючи вагою стержня  $ACB$  і враховуючи значення кута  $\alpha = 30^\circ$ ,

визначити реакції в'язей.

### Розв'язок

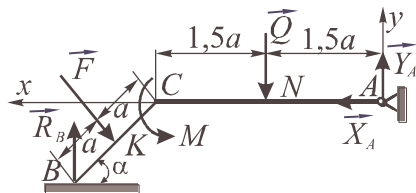


Рисунок 6.4

Ломаний стержень  $ACB$  перебуває у рівновазі під дією пари сил з моментом  $M = 15\text{кНм}$ , зосереджених сил  $F = 10\text{кН}$  та  $Q = 10\text{кН}$ , прикладених в точках  $K$  та  $N$ , реакції  $R_B$  площини, яка

направлена вертикально, та складових  $X_A, Y_A$  реакції нерухомого шарніра  $A$  (Рис. 6.4).

Вибираємо систему координат  $Oxy$ .

Складаємо рівняння рівноваги, прийнявши за центр моментів точку  $A$ ,

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; X_A - F \sin 30^\circ = 0,$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; Y_A - Q - F \cos 30^\circ + R_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; -R_B(3a + 2a \cos 30^\circ) + Q \cdot 1,5 \cdot a + M + F \cdot \cos 30^\circ(3a + a \cdot \cos 30^\circ) + F \sin 30^\circ \cdot a \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

З останнього рівняння визначаємо реакцію  $R_B$ :

$$-R_B(3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,866) + 10 \cdot 1,5 \cdot 2 + 15 + 10 \cdot 0,866(3 \cdot 2 + 2 \cdot 0,866) + 10 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 = 0, R_B = 12,36 \text{ кН}.$$

З першого рівняння знаходимо  $X_A$ :

$$X_A = F \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}.$$

З другого рівняння знаходимо

$$Y_A: Y_A = Q + F \cos 30^\circ - R_B = 10 + 10 \cdot 0,866 - 12,36 = 6,3 \text{ кН}.$$

### Перевірка

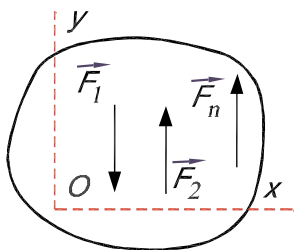
$$\sum m_B(\vec{F}_i) = Y_A(3a + 2a \cdot \cos 30^\circ) + X_B \cdot 2a \cdot \sin 30^\circ - Q(2a \cdot \cos 30^\circ + 1,5a) + M - F \cos 30^\circ \cdot a \cdot \cos 30^\circ - F \sin 30^\circ \cdot a \cdot \sin 30^\circ = 0,$$

$$6,3(3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,866) + 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,5 - 10(2 \cdot 2 \cdot 0,866 + 1,5 \cdot 2) + 15 - 10 \cdot 0,866 - 10 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 = 0.$$

$$\text{Або } -84,64 + 84,64 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

#### 6.4. Рівновага плоскої системи паралельних сил



Як окремий випадок, отримаємо аналітичні умови рівноваги плоскої системи паралельних сил. Оскільки вибір осей координат довільний, направимо вісь  $Oy$  паралельно до ліній дії сил системи (Рис. 6.5).

Рисунок 6.5

Тоді

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} \equiv 0$$

і з умови рівноваги (6.5) отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_o(\vec{F}_i) = 0, \quad (6.8)$$

де сили  $\vec{F}_i$  паралельні до осі  $Oy$  ( $\vec{F}_i \parallel Oy$ ).

Отже, для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно й достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій сил системи на вісь, паралельну до ліній їх дій, а також алгебраїчна сума моментів усіх сил системи відносно довільної точки площини їх дії дорівнювали нулю.

Аналогічно до (6.5) умови (6.8) називають основними умовами рівноваги плоскої системи паралельних сил.

Відповідно до умов (6.6) можна записати другу форму умов рівноваги плоскої системи паралельних сил:

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad (\vec{F}_i \parallel Oy), \quad (6.9)$$

де точки  $A$  і  $B$  не повинні лежати на прямій, паралельній до осі  $Oy$ .

## 6.5. Розподілені навантаження

У інженерних розрахунках часто є навантаження, розподілені по об'єму тіла, поверхні або вздовж деякої лінії. Такі навантаження називають розподіленими. Систему розподілених сил характеризують своєю інтенсивністю  $q$ , тобто величиною сили, що приходить на одиницю об'єму, площі чи довжини навантаженого тіла. Інтенсивність розподілених об'ємних сил вимірюють в  $\left[\frac{H}{M^3}\right]$ , поверхневих сил - в  $\left[\frac{H}{M^2}\right]$ , розподілених вздовж лінії – в  $\left[\frac{H}{M}\right]$ .

Розглянемо деякі прості приклади розподілених сил, що лежать в одній площині.

1. Сили, рівномірно розподілені вздовж відрізка прямої (Рис. 6.6, а). Для такої системи сил інтенсивність  $q$  є величина постійна. Для статичних розрахунків цю систему можна замінити рівнодійною силою  $\vec{Q}$ , модуль якої

$$Q = aq. \quad (6.10)$$

Сила  $\vec{Q}$  прикладена посередині відрізка  $AB$ .

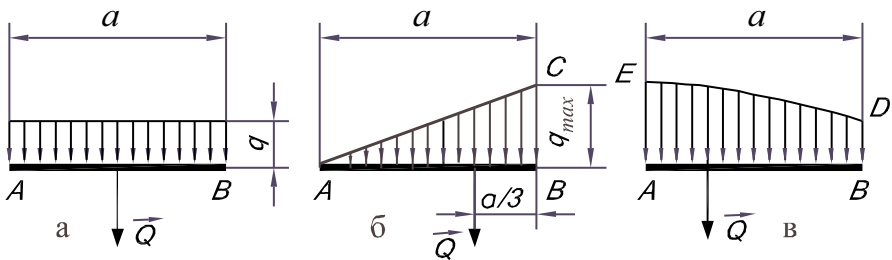


Рисунок 6.6

2. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за лінійним законом (Рис. 6.6, б). Прикладом такого навантаження можуть бути сили тиску води на греблю, що мають максимальну величину на дні і зменшуються до нуля на поверхні води.

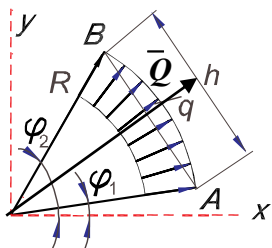
Для таких сил інтенсивність  $q$  є змінною величиною, що зростає від нуля до максимальної величини  $q_{max}$ . Рівнодійну  $\vec{Q}$  таких сил визначають так само, як рівнодійну сил ваги, що діють на однорідну трикутну пластину  $ABC$ .

Вага однорідної пластини пропорційна до її площі, отже модуль сили  $\vec{Q}$  буде дорівнювати

$$Q = \frac{1}{2} a q . \quad (6.11)$$

Прикладена сила  $\vec{Q}$  на відстані  $\frac{a}{3}$  від сторони  $BC$  трикутника  $ABC$ .

3. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за довільним законом (Рис. 6.6, в). За аналогією з силами ваги модуль рівнодійної  $\vec{Q}$  таких сил дорівнюватиме площі фігури  $ABDE$ ,



вимірній у відповідному масштабі, а лінія дії рівнодійної буде проходити через центр ваги цієї площі.

4. Сили, рівномірно розподілені по дузі кола з радіусом  $R$  (Рис. 6.7). Прикладом таких сил можуть бути сили гідростатичного тиску на бічні стінки циліндричної посудини.

**Рисунок 6.7**

Рівнодійну таких сил знайдемо через її проекції на осі системи координат. Запишемо для елемента дуги кола завдовжки  $Rd\varphi$  проекції рівнодійної так

$$dQ_x = qR \cos \varphi d\varphi; \quad dQ_y = qR \sin \varphi d\varphi .$$

Тоді проекції рівнодійної сил, що рівномірно розподілені по дузі  $AB$  кола,

$$Q_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} qR \cos \varphi d\varphi = qR \sin \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = qR(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1);$$

$$Q_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} qR \sin \varphi d\varphi = -qR \cos \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = qR(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Модуль сили  $\vec{Q}$  буде дорівнювати

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}. \quad (6.12)$$

Направлена сила  $\vec{Q}$  вздовж прямої, що нахилена до осі  $x$  під кутом

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Наприклад, якщо  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}; \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , то  $Q_x = 2qR; Q_y = 0$ .

Якщо  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}; \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ , то  $Q_x = \sqrt{2}qR; Q_y = 0$ .

Довжина хорди, що стягує дугу  $AB$ , дорівнює  $h = \sqrt{2}R$ .  
Тоді  $Q = Q_x = qh$ .

## 6.6. Рівновага системи тіл

Розглянемо задачу на рівновагу не одного тіла, а системи тіл, які вільно опираються одне на одне чи з'єднані між собою в'язями і перебувають під дією довільної плоскої системи сил або плоскої системи паралельних сил.

Розв'язуючи таку задачу необхідно враховувати, що у разі рівноваги системи тіл кожне тіло системи також перебуває у рівновазі й усі сили, прикладені до нього, зрівноважені. Тоді для плоскої системи сил можна скласти по три рівняння рівноваги для кожного з тіл окремо.

Отже для системи, яку складають  $n$  тіл, можна скласти всього  $3n$  рівнянь рівноваги. Розв'язуючи задачі на рівновагу системи тіл, застосовують метод розчленування системи, який полягає в тому, що розглядають рівновагу кожного тіла системи окремо.

Проілюструємо цей метод прикладом.

**Задача 6.2.** Визначити реакції в точках  $A, B, C$  тришарнірної арки, на яку діє сила  $F=10$  кН. Розміри арки показані на Рис. 6.8.

Розв'язок

Спочатку розглядаємо рівновагу всієї конструкції. Звільняємо її від в'язей та заміняємо їх дію силами реакцій  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$  (Рис. 6.8, а). Вибираємо осі координат так, як показано на Рис. 6.8, а. Для плоскої системи сил складаємо три рівняння рівноваги:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad X_A + X_B + F \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_B - F \sin 45^\circ = 0; \quad (6.13)$$

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad 10Y_B - 5F \cos 45^\circ = 0.$$

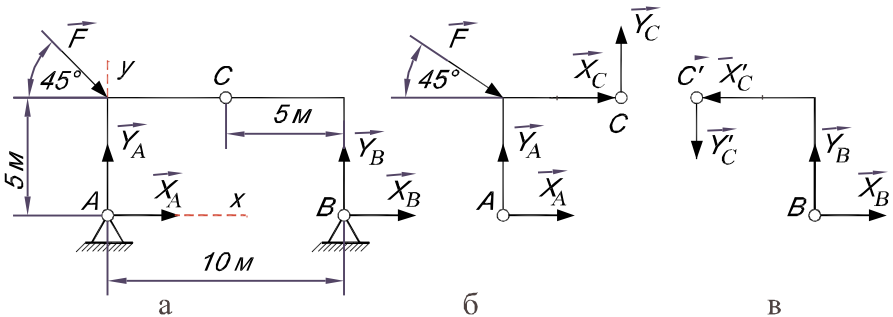


Рисунок 6.8



У рівняннях (6.13) чотири невідомих. Оскільки рівнянь рівноваги три, то задача статично невизначувана. Тому додатково розглянемо рівновагу лівої частини арки (Рис. 6.8, б), на яку діє задана сила  $\vec{F}$  і складаємо ще три рівняння рівноваги:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad X_A + X_C + F \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad 5Y_C - 5X_C - 5F \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = 0; \quad -5Y_A + 5F \sin 45^\circ + 5X_A = 0.$$

Одержали шість рівнянь, з яких визначаємо всі шість невідомих реакцій:

$$X_A = -3,54 \text{ кН}; \quad Y_A = 3,54 \text{ кН}; \quad X_B = -3,34 \text{ кН}; \quad Y_B = 3,54 \text{ кН}; \quad X_C = -3,54 \text{ кН}; \quad Y_C = 3,54 \text{ кН}.$$

### Контрольні запитання

1. Записати формули для головного вектора та головного моменту довільної плоскої системи сил.
2. Як обчислити модуль головного вектора довільної плоскої системи сил?
3. Записати основні умови рівноваги довільної плоскої системи сил.
4. Записати еквівалентні форми умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
5. Записати умови рівноваги для плоскої системи паралельних сил.
6. Як визначають рівнодійну розподілених за лінійним законом сил?

7. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для системи з  $n$  тіл?

8. Який метод застосовують для розв'язку задач на рівновагу системи тіл?

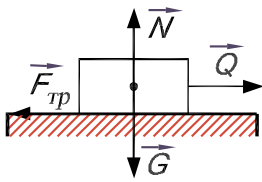
## Глава 7. Тертя

Тертя явно чи приховано завжди присутнє у практичній діяльності людини й відіграє при цьому як корисну, так і шкідливу роль. Основна властивість тертя – чинити опір будь-якому переміщенню тіла і це, як не парадоксально, з одного боку, допомагає тілу рухатися з певною швидкістю, а з другого – витрачати певну кількість енергії.

Залежно від виду руху тіла по поверхні розрізняють тертя ковзання, кочення та вертіння.

### 7.1. Тертя ковзання. Закони Кулона

Розглянемо тіло вагою  $\vec{G}$ , що лежить на шорсткій горизонтальній поверхні (Рис. 7.1). Якщо до цього тіла прикласти горизонтальну силу  $\vec{Q}$ , то на тіло крім двох зрівноважених сил  $\vec{N}$ ,  $\vec{G}$  і сили  $\vec{Q}$ , буде діяти сила, що виникає між стичними поверхнями і яка буде напрямлена протилежно до сили  $\vec{Q}$ . Позначимо цю силу  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Ця сила буде чинити опір



руху тіла по шорсткій поверхні і в межах модуля сили  $\vec{Q}$  буде її зрівноважувати. Силу  $\vec{F}_{\text{тр}}$  називають **силою тертя ковзання (тертя першого роду)**.

Рисунок 7.1

Тертя ковзання має механіко-молекулярну природу. Воно зумовлено як опором, що виникає при механічній деформації мікроставів шорстких поверхонь, так і подоланням міжмолекулярних зв'язків при достатньому зближенні поверхонь, що стикаються між собою.

**Отже сила тертя ковзання – це сила опору, яка виникає при переміщенні або намаганні переміщення одного тіла по поверхні іншого.**

Про перше дослідження явища тертя згадується в роботах Леонардо да Вінчі (1452-1519). Однак уперше властивості сил тертя сформулювали Г.Амонтон (1663-1705) та Ш.Кулон (1736-1806).

Розглянемо основні закони Кулона для сухого тертя ковзання.

1. Вектор сили тертя ковзання розміщений у спільній дотичній площині поверхонь, що контактують між собою, і напрямлений у бік, протилежний до напрямку руху тіла, залежить від активних сил. Модуль сили тертя перебуває в межах між нулем і максимальним значенням, яке досягається в момент порушення стану рівноваги, тобто

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр. max}}. \quad (7.1)$$

2. Максимальна сила тертя ковзання не залежить від площі поверхонь контакту тіл.

3. Максимальна сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску (нормальній реакції):

$$F_{\text{тр. max}} = fN, \quad (7.2)$$

де  $f$  – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який називають **коефіцієнтом тертя ковзання (статичним коефіцієнтом тертя першого роду)**.

4. Коефіцієнт тертя ковзання  $f$  залежить від матеріалу та фізичного стану поверхонь контактуючих тіл (ступеня обробки поверхонь, температури, вологості тощо). Значення коефіцієнта тертя ковзання встановлюють експериментально й наводять у довідковій літературі. Значення  $f$  для деяких матеріалів подано в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Матеріали тіл, між якими виникає тертя	Значення коефіцієнта тертя ковзання $f$
Сталь по сталі	0,15
Сталь по льоду	0,027
Дуб по дубу (поперек волокон)	0,54
Дуб по дубу (вздовж волокон)	0,62
Цегла по бетону	0,76
Метал по дереву	0,5-0,6

Експериментально коефіцієнти тертя ковзання можна дослідити на простому приладі, схему якого наведемо на рис. 7.2. Горизонтальну плиту  $AB$  та прямокутний брус  $D$  виготовляють з матеріалів, для яких визначають коефіцієнти тертя. На брус  $D$  будуть діяти сила ваги  $\vec{G}$ , нормальна реакція  $\vec{N}$ , рушійна сила  $\vec{Q}$ , яка в стані спокою зрівноважена силою тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (сила  $\vec{Q}$  чисельно дорівнює силі ваги чашки  $E$  з тягарцями).

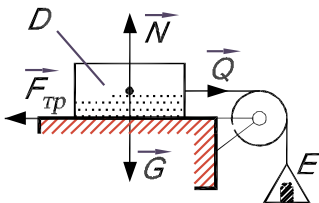


Рисунок 7.2

Поступово змінюючи вагу чашки  $E$ , знаходимо те значення  $Q^*$ , при якому брус  $D$  починає рухатись. Очевидно гранична сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{Q}^*$ . А оскільки в цьому випадку  $N = G$ , то

$$f_0 = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{Q^*}{G}.$$

Зробивши ряд дослідів, можна переконатися, що у разі зміни в певних межах ваги бруса  $\vec{G}$  величина  $\vec{Q}^*$  зростає пропорційно  $\vec{G}$ , а значення  $f_0$  залишається сталим.

Закон Кулона про граничне значення сили тертя справедливий і для руху одного тіла по поверхні другого з деякою відносною швидкістю. При ковзанні по шорсткій поверхні до тіла, крім інших сил, прикладена сила тертя, напрямлена в бік, протилежний напрямку швидкості тіла. Цю силу деколи називають **динамічною силою** тертя ковзання. Модуль цієї сили

$$F_{\text{тр}} = \tau N, \quad (7.3)$$

де  $\tau$  – коефіцієнт тертя під час руху (динамічний коефіцієнт тертя).

Досліди показали, що для більшості матеріалів  $\tau < f$  та  $\tau$  зменшується зі збільшенням відносної швидкості ковзання. Однак для наближених технічних розрахунків вважають, що коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості й перебуває у межах, наведених у довідковій літературі.

## 7.2. Кут і конус тертя

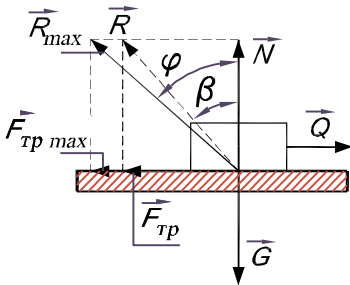


Рисунок 7.3

Нехай тверде тіло, на яке діють активні сили  $\vec{G}$  та  $\vec{Q}$ , розміщене на шорсткій поверхні (Рис. 7.3). Повну реакцію шорсткої поверхні  $\vec{R}$  визначають за довжиною і напрямом діагоналі паралелограма, побудованого на нормальній реакції  $\vec{N}$  і силі тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ ,

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (7.4)$$

Повна реакція  $\vec{R}$  відхилена від нормалі до опорної поверхні на кут  $\beta$ . Як відомо, зі збільшенням  $\vec{Q}$  зростає і сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  і при цьому повна реакція відхиляється від нормалі на все більший кут. Це відхилення буде максимальним при  $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{F}_{\text{тр.max}}$ .

Найбільше значення кута  $\beta$  відхилення повної реакції  $\vec{R}$  від нормалі називають **кутом тертя**  $\varphi$ .

З Рис. 7.3 та залежності (7.2) випливає, що

$$\text{tg} \varphi = \frac{F_{\text{тр.max}}}{N} = \frac{fN}{N} = f. \quad (7.5)$$

Залежно від дії активних сил напрям максимальної повної реакції буде змінюватись. Геометричним місцем усіх можливих положень максимальної реакції  $\vec{R}_{\text{max}}$  буде конічна поверхня – **конус тертя** (Рис. 7.4). Якщо коефіцієнт тертя  $f$  у всіх напрямках однаковий, то згідно з залежністю (7.5) конус тертя буде круговим. Простір усередині конуса тертя має таку властивість,

що якою б великою за модулем не була активна сила  $\vec{Q}$ , лінія дії якої розміщена всередині конуса тертя (Рис. 7.4), вона не виведе тіло зі стану спокою. Це явище називають **заклинюванням**.

Для підтвердження цієї властивості конуса тертя запишемо рівнян

ня рівноваги для тіла, зображеного на Рис. 7.5,

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F_{\text{тр}} - Q \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N - Q \cos \alpha = 0;$$

$$F_{\text{тр}} \leq fN.$$

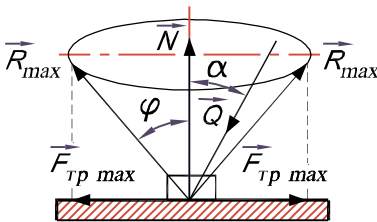


Рисунок 7.4

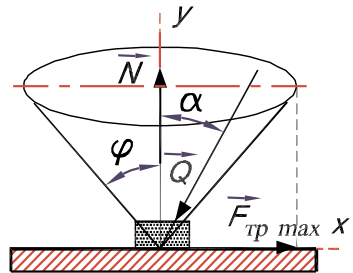


Рисунок 7.5

З рівнянь знайдемо

$$F_{\text{тр}} = Q \sin \alpha, \quad N = Q \cos \alpha.$$

Підставляючи ці величини в нерівність, отримуємо

$$\text{tg} \alpha \leq f$$

або, враховуючи (7.5),

$$\text{tg} \alpha \leq \text{tg} \varphi.$$

Отже при **рівновазі тіла**

$$\alpha \leq \varphi.$$

Це означає, що для порушення стану рівноваги тіла необхідно, щоб лінія дії активної сили  $\vec{Q}$  повинна проходити за межами конуса тертя.

### Тертя ковзання в клинуватих напрямних

У багатьох машинобудівельних конструкціях використовують клинуваті чи циліндричні напрямні для поступального переміщення тіл.

Розглянемо тертя ковзання в клинуватій напрямній. Нехай сила  $\vec{Q}$  притискає тіло 1 (Рис. 7.6, а) до напрямної 2, лінія дії якої перпендикулярна до осі напрямної. Сила  $\vec{F}$  діє горизонтально і пересуває тіло зі сталою швидкістю  $v$ . Між тілом 1 і напрямною 2 у площинах контакту виникають сили нормального тиску  $\vec{N}_1$ ,  $\vec{N}_2$  і сили тертя  $\vec{F}_{\text{тр}1}$  і  $\vec{F}_{\text{тр}2}$  (Рис. 7.6, б). Сумарна сила тертя

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} = f(N_1 + N_2).$$

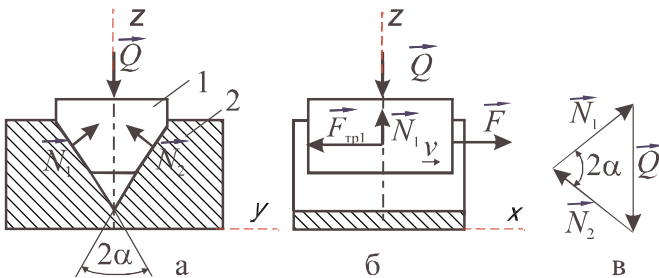


Рисунок 7.6



Якщо тіло і напрямна симетричні відносно вертикальної осі, то модулі сил нормального тиску однакові, тобто  $N_1 = N_2$ . Тоді

$$F_{\text{тр}} = 2fN_1. \quad (7.6)$$

У площині  $Oyz$  у стані рівноваги тіла 2

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{Q} = 0.$$

З побудованого за цією рівністю силового трикутника (Рис. 7.6, в) знаходимо

$$N_1 = \frac{Q}{2 \sin \alpha}. \quad (7.7)$$

Після підстановки (7.7) в (7.6), отримаємо

$$F_{\text{т}} = 2f \frac{Q}{2 \sin \alpha} = \frac{f}{\sin \alpha} Q = f' \cdot Q,$$

де  $f' = \frac{f}{\sin \alpha}$  - зведений коефіцієнт тертя для клинуватої напрямної.

Повна реакція, яка діє на тіло з боку напрямної, відхилена від вертикалі на кут  $\rho' = \text{arctg} f'$ .

### Тертя ковзання в циліндричних напрямних

Циліндрична напрямна зображена на Рис. 7.7. Нехай на циліндричне тіло 1 у вертикальній площині діє сила  $\vec{Q}$ , яка перпендикулярна до осі напрямної 2. Сила  $\vec{F}$  діє паралельно до напрямної і пересуває тіло з певною швидкістю  $v$ . Дуга, по якій відбувається контакт, змінюється від  $\alpha = 0^\circ$  до  $\alpha = \varphi_1$  і від  $\alpha = 0^\circ$  до  $\alpha = \varphi_2$ . Очевидно, що найбільша величина розподіленого навантаження, яке діє на тіло, є в його найнижчій точці коли  $\alpha = 0^\circ$ , а найменша – коли  $\alpha = -\varphi_1$  і  $\alpha = \varphi_2$ . Закон зміни розподіленого навантаження в межах дуги контакту, запишемо у вигляді:

$$q = q_0 \cos \alpha,$$

де  $q_0$  - максимальна величина навантаження при  $\alpha = 0^\circ$ .

Виділимо по дузі контакту елементарну дугу  $ds$ , що відповідає елементарному приросту кута  $d\alpha$ . Елементарна сила тертя, яка діятиме на смугу тіла довжиною  $\ell$ , дорівнює:  $dF_{\text{тр}} = f \cdot q \cdot \ell \cdot ds = f \cdot q_0 \cdot \cos \alpha \cdot \ell \cdot r \cdot d\alpha$ , а сила тертя, що діє на тіло в цілому:

$$F_{\text{тр}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f q_0 \ell r \cos \alpha \cdot d\alpha = f q_0 \ell r (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

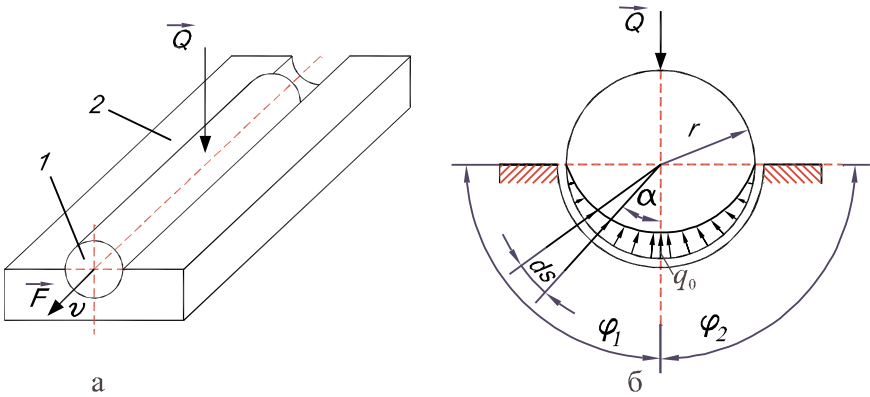


Рисунок 7.7

Спроекувавши всі сили, що діють на тіло, на напрям сили  $\bar{Q}$ , виразимо останню через параметри пари тертя:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q \cdot \cos \alpha \cdot \ell \cdot ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_0 \cdot \ell \cdot r \cdot \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} q_0 \cdot \ell \cdot r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} q_0 \cdot \ell \cdot r \left[ \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Зведений коефіцієнт тертя визначаємо як відношення сили тертя до сили нормального тиску:

$$f' = \frac{F_f}{Q} = \frac{2f(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{\left[ \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}}$$

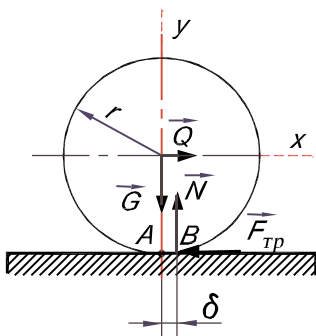
Дуже часто зустрічаються циліндричні пари, в яких кути  $\varphi_1 = -90^\circ$  і  $\varphi_2 = 90^\circ$ . Для такого випадку зведений коефіцієнт тертя дорівнює:

$$f' = \frac{4}{\pi} f.$$

### 7.3. Тертя кочення

**Тертям кочення (тертя другого роду)** називають опір, який виникає при коченні або намаганні кочення одного тіла по поверхні іншого.

Розглянемо круглий коток вагою  $\vec{G}$  і радіусом  $\vec{r}$ , який розміщений на горизонтальній поверхні (Рис. 7.8). До центра



котка прикладена горизонтальна сила  $\vec{Q}$ . Під вагою котка опорна поверхня деформується і точка прикладання реакцій  $\vec{N}$  і  $\vec{F}_{\text{тр}}$  переміщується з точки  $A$  в точку  $B$ . При певному значенні модуля сили  $\vec{Q}$  коток перебуватиме в рівновазі. Запишемо рівняння рівноваги сил, прикладених до котка,

Рисунок 7.8

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad Q - F_{\text{тр}} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \quad N - G = 0; \\ \sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad m_A(\vec{N}) - Qr = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

З перших двох рівнянь отримаємо

$$Q = F_{\text{тр}}, N = G.$$

Це свідчить про те, що у разі рівноваги котка до нього прикладені дві пари сил  $(\vec{Q}, \vec{F}_{\text{тр}})$  і  $(\vec{G}, \vec{N})$ . Перша пара прагне повернути тіло, тобто надати йому руху. Друга чинить опір повороту. Момент цієї пари будемо називати **моментом опору кочення** і позначимо його  $M_{\text{он}}$ . Цей момент дорівнює моменту сили  $\vec{N}$  відносно точки  $A$ :

$$M_{\text{он}} = m_A(\vec{N}). \quad (7.9)$$

У будь-який момент рівноваги котка обидві пари сил зрівноважені, що впливає з третього рівняння системи (7.8).

У момент початку кочення момент опору  $M_{\text{он}}$  досягне свого максимального значення  $M_{\text{макс}}$ , яке за дослідями пропорційне нормальному тиску:

$$M_{\text{макс}} = \delta N. \quad (7.10)$$

Коефіцієнт пропорційності  $\delta$  називають **коефіцієнтом тертя кочення**, або **коефіцієнтом тертя другого роду**. Цей коефіцієнт дорівнює відстані від вертикальної прямої, яка проходить через центр котка, до точки прикладання нормальної реакції  $\vec{N}$  і має розмірність довжини. Значення деяких коефіцієнтів тертя кочення подано в табл. 7.2.

У стані рівноваги котка момент опору  $M_{\text{он}}$  не перевищує свого максимального значення, тобто  $M_{\text{он}} \leq M_{\text{макс}}$ .

Ураховуючи третє рівняння системи (7.8), а також (7.9) і (7.10), отримаємо

$$\begin{aligned} Qr &\leq \delta N, \\ \text{звідси} \quad Q &\leq \frac{\delta}{r} N. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Таблиця 7.2

Матеріали тіл, між якими виникає тертя	Значення коефіцієнта тертя кочення $\delta$ , мм
М'яка сталь по м'якій сталі	0,05
Куля по загартованій сталі	0,01
Дерево по дереву	0,5...0,6
Дерево по сталі	0,3...0,4

Нерівність (7.11) визначає умову, за якою не відбувається кочення котка. З другого боку, щоб коток не ковзав по поверхні, необхідно, щоб сила  $\vec{Q}$  була менша від максимальної сили тертя  $\vec{F}_{\text{тр max}}$ , тобто

$$Q \leq fN. \quad (7.12)$$

Оскільки значення  $\frac{\delta}{r}$  значно менше від коефіцієнта тертя ковзання  $f$  (приблизно на порядок), то коли зростає сила  $\vec{Q}$ , завжди спочатку відбуватиметься кочення котка без проковзування. Тоді умова чистого кочення (без проковзування) має вигляд

$$f > \frac{\delta}{r}. \quad (7.13)$$

**Примітка.** Виходячи з фізики процесу кочення і використовуючи лему Пуансо про паралельне перенесення сили, розрахункову схему, що визначає момент опору кочення під час кочення тіла по поверхні, можна подати у вигляді, показаному на Рис. 7.9, де  $M_{on}$  визначають за формулою (7.10).

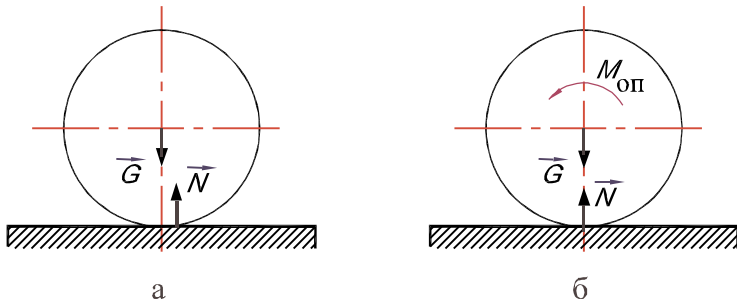


Рисунок 7.9

### Переміщення тіл на котках

Тертя кочення виникає у разі ручного переміщення вантажів за допомогою труб або коліщатковими транспортерами. Визначимо, яку найменшу силу  $\vec{F}$  необхідно прикласти до вантажу, щоб перемістити його на котках (Рис. 7.10).

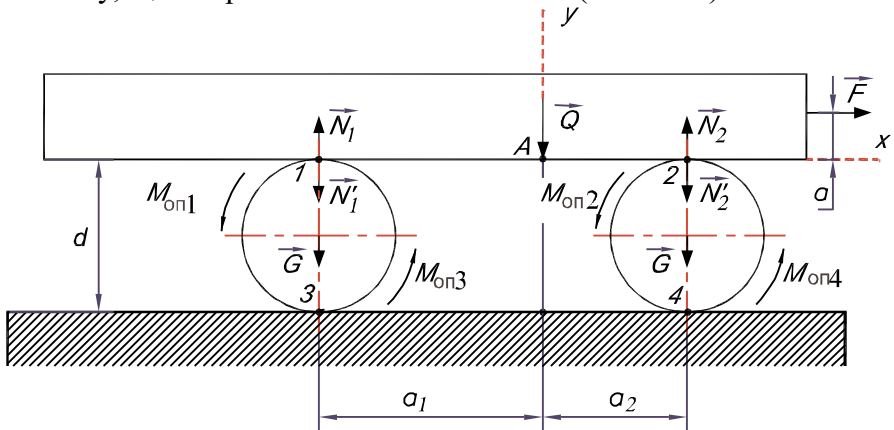


Рисунок 7.10

Нехай  $\vec{Q}$  - сила, яка притискає вантаж до котків по нормалі. Як правило, це сила ваги вантажу. У центрах ваги котків прикладені сили ваги котків  $\vec{G}$ . Коефіцієнти тертя кочення: між вантажем і котками  $\delta_1$ , між котками і площиною  $\delta_2$ . Під час переміщення вантажу вправо в напрямку сили  $\vec{F}$  на котки будуть діяти моменти тертя в зонах контакту вантаж-коток і

коток-площина. Тоді активний момент від сили  $\vec{F}$  у разі рівномірного переміщення вантажу буде зрівноважений чотирма моментами опору кочення

$$F(d+a) = M_{\text{оп1}} + M_{\text{оп2}} + M_{\text{оп3}} + M_{\text{оп4}}, \quad (7.14)$$

де  $d$  - діаметр котків,  $a$  - плече прикладання сили  $\vec{F}$ , моменти опору кочення:  $M_{\text{оп1}} = N'_1 \cdot \delta_1$ ,  $M_{\text{оп2}} = N'_2 \cdot \delta_1$ ,  $M_{\text{оп3}} = (N'_1 + G)\delta_2$ ;  $M_{\text{оп4}} = (N'_2 + G)\delta_2$ .

Рівняння рівноваги вантажу мають вигляд

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N_1 + N_2 - Q = 0;$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -a \cdot F - a_1 \cdot N_1 + a_2 \cdot N_2 = 0.$$

З цих рівнянь визначаємо сили  $\vec{N}_1$  та  $\vec{N}_2$ , що діють на вантаж з боку котків.

Підставляючи в (7.14) вирази для моментів опору кочення та сил  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_2$ , отримаємо вираз для визначення необхідної сили  $\vec{F}$

$$F = \frac{Q(\delta_1 + \delta_2) + 2G\delta_2}{d+a}.$$

Якщо вагою котків знехтувати, тоді

$$F = \frac{Q(\delta_1 + \delta_2)}{d+a}.$$

З отриманих виразів для сили  $\vec{F}$  можна зробити такі висновки:

- величина сила  $\vec{F}$  не залежить від положення точки прикладання нормальної сили  $\vec{Q}$ ;

- зі збільшенням діаметрів котків  $d$  і плеча  $a$  зменшується величина сили  $\vec{F}$ , яку необхідно прикласти до вантажу для його переміщення на котках.

## 7.4. Тертя вертіння

Якщо до кулі, що лежить на горизонтальній площині, прикласти пару сил з моментом  $M$ , розмішену також у горизонтальній площині, то пара сил буде намагатися повернути кулю навколо вертикальної осі. Досліди показують, що куля розпочинає свій рух лише тоді, коли величина  $M$  буде більша за певну граничну величину  $M_{\text{тр}}$ . Це пояснюють наявністю тертя вертіння, тобто опору вертіння, що виникає внаслідок тертя кулі та поверхні. Величину  $M_{\text{тр}}$  визначають за залежністю

$$M_{\text{тр}} = \lambda N, \quad (7.15)$$

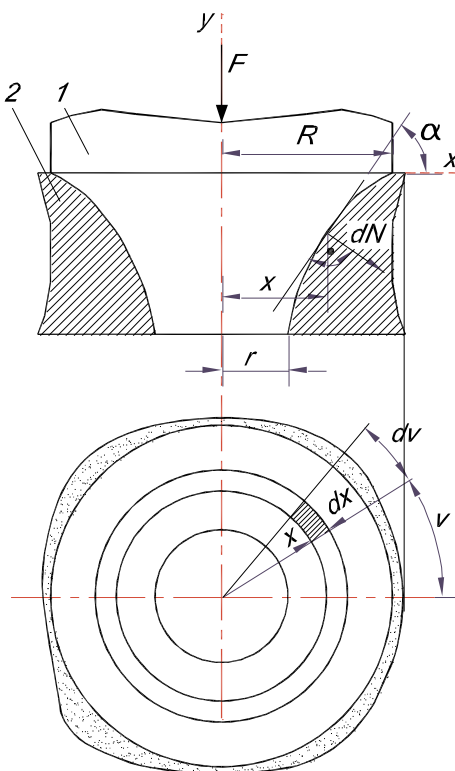


Рисунок 7.11

де  $\vec{N}$  – сила нормального тиску кулі на площину, що дорівнює в даному випадку вазі кулі,  $\lambda$  – **коефіцієнт тертя вертіння**, який має розмірність довжини. За величиною цей коефіцієнт дуже малий (в 5-10 разів менший від коефіцієнта тертя кочення  $\delta$ ).

Тертя вертіння має місце тоді, коли зовнішня сила  $F$  діє вздовж осі тіла, що обертається. Нехай тіло 1 обертається навколо вертикальної осі ординат і своїм кінцем опирається на опору 2 (Рис. 7.11).

Поверхня, по якій відбувається тертя, є результатом обертання твірної  $y = \rho(x)$  навколо



осі тіла. Щоби надати рух тілу 1, необхідно подолати момент тертя, який виникає на поверхні контакту. Величина моменту залежить від закону розподілу навантаження. У разі сталого навантаження розглянемо елементарний сектор площини контакту, який обмежений з одного боку радіусами  $x$  і  $x + dx$ , а з другого боку кутами  $\nu$  і  $\nu + d\nu$ , причому  $r \leq x \leq R$  і  $0 \leq \nu \leq 2\pi$ .

Площа цього сектора дорівнює  $dA = x d\nu dx$ . Цій елементарній площі кільця радіусом  $x$  і товщиною  $dx$  відповідатиме елементарна площа поверхні контакту, до якої прикладена елементарна нормальна сила  $dN$ :

$$dN = qx d\nu dx.$$

Елементарна сила тертя, яка діє на елементарну площу поверхні:

$$dF_{\text{тр}} = f dN,$$

а елементарний момент тертя:

$$dM_{\text{тр}} = x dF_{\text{тр}}.$$

Після відповідних підстановок отримуємо:

$$M_{\text{тр}} = \int_0^{2\pi} \int_r^R x f q x d\nu \cdot dx = f \int_0^{2\pi} \int_r^R q x^2 d\nu \cdot dx = 2\pi f q \int_r^R x^2 dx. \quad (7.16)$$

Навантаження  $q$  виразимо через параметри тіл контакту та зовнішню силу  $F$ . Для цього спроектуємо всі сили на вісь ординат:

$$F = \int_0^{2\pi} \int_r^R q \frac{x d\nu dx}{\cos \alpha} = 0,$$

де  $\alpha$  - кут нахилу дотичної до кривої  $y = \rho(x)$ . Його визначаємо як:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\rho}{dx} \equiv \rho'(x).$$

Зважаючи, що  $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , отримуємо:

$$F = 2\pi q \int_r^R x dx \sqrt{1 + \rho'^2(x)} \Rightarrow q = \frac{F}{2\pi \int_r^R x \sqrt{1 + \rho'^2(x)} dx}. \quad (7.17)$$

Підставляючи вираз (7.17) у вираз (7.16), дістанемо аналітичну залежність для визначення моменту тертя в п'яті при  $q = \text{const}$  для довільних контактуючих поверхонь:

$$M_{\text{тр}} = \frac{Ff \int_r^R x^2 dx}{\int_r^R x \sqrt{1 + \rho'^2(x)} dx}. \quad (7.18)$$

Знайдемо за залежністю (7.16) момент тертя для деяких випадків.

### Плоска кільцева п'ята

У плоскій п'яті (Рис. 7.12) рівнянням твірної поверхні контакту є пряма, яка збігається з віссю абсцис, тобто  $\rho(x) = 0$ . Підставляємо це значення у вираз (7.16) й отримуємо аналітичну залежність для моменту тертя:

$$M_{\text{тр}} = \frac{Ff \int_r^R x^2 dx}{\int_r^R x dx} = \frac{2f}{3} F \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \lambda F,$$

де 
$$\lambda = \frac{2f}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

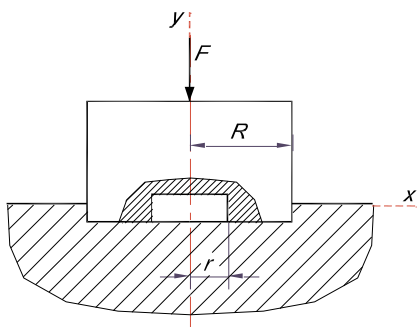


Рисунок 7.12

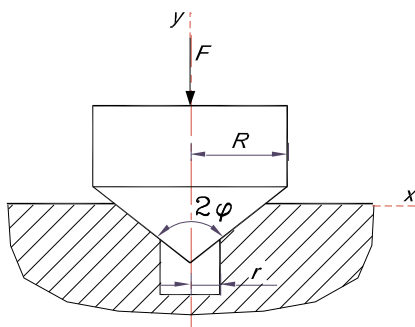


Рисунок 7.13

### Конічна кільцева п'ята

Знаючи розміри конічної кільцевої п'яти (Рис. 7.13)  $R$ ,  $r$  і  $\varphi$ , можемо записати рівняння твірної конуса у вигляді прямої:

$$y \equiv \rho(x) = kx + b,$$

де  $b = R \operatorname{ctg} \varphi$ ,  $k = \operatorname{ctg} \varphi$ .

Враховуючи це, отримуємо:

$$M_{\text{тр}} = \frac{Ff \int_r^R x^2 dx}{\int_r^R x \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} dx} = \frac{2f}{3} F \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \sin \varphi = \lambda F,$$

$$\text{де } \lambda = \frac{2f}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \sin \varphi.$$

Отже, момент тертя в конічній п'яті при рівних інших умовах менший, ніж у плоскій, у  $\sin \varphi$  разів.

**Задача 7.1.** Тіло масою  $m = 10 \text{ кг}$  утримується в рівновазі силою  $\vec{F}$  на шорсткій похилій площині (Рис. 7.14). Кут нахилу похилої площини  $\beta = 30^\circ$ , а кут нахилу сили  $\vec{F}$  до похилої площини  $\alpha = 20^\circ$ . Коефіцієнт тертя стичних поверхонь  $f = 0,5$ .

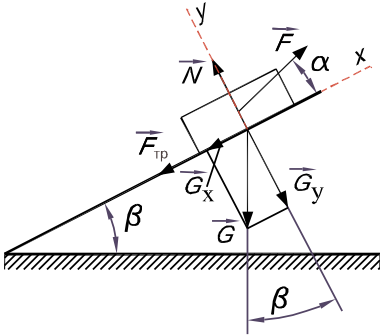


Рисунок 7.14

Визначити величину сили  $\vec{F}$  при рівновазі тіла на шорсткій похилій площині.

### Розв'язок

Розглядаючи тіло як вільне, прикладемо до нього активні сили  $\vec{F}$  і  $\vec{G}$ , реакцію  $\vec{N}$  з боку площини та силу тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , яка виникає між тілом і площиною. Вибираємо вісь координат, як

показано на рис. 7.14, і складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -F_{\text{тр}} - G \sin \beta + F \cos \alpha = 0;$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad N - G \cos \beta + F \sin \alpha = 0.$$

З другого рівняння визначаємо

$$N = G \cos \beta - F \sin \alpha.$$

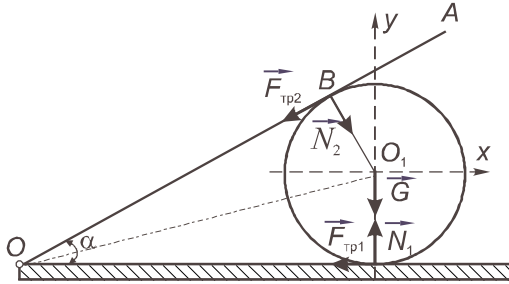
Ураховуючи, що  $G = mg$  та  $F_{\text{тр}} = f \cdot N$ , отримаємо

$$F_{\text{тр}} = f(mg \cos \beta - F \sin \alpha).$$

Підставляємо отриманий вираз для сили тертя в перше рівняння і розв'язуємо його відносно невідомої сили  $F$

$$F = \frac{mg(f \cos \beta + \sin \beta)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{10 \cdot 9,81(0,5 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)}{\cos 20^\circ + 0,5 \sin 20^\circ} = 84,41 \text{ Н}.$$

**Задача 7.2.** Важка балка  $OA$  (Рис. 7.15), шарнірно закріплена одним кінцем до нерухомої горизонтальної площини, а точкою  $B$  опирається на кулю вагою  $\vec{G}$  та радіуса  $R$ , яка розміщена на цій же площині. Визначити максимальне значення кута  $\alpha$  між балкою і горизонтальною площиною у рівновазі системи, якщо коефіцієнти тертя ковзання між балкою і кулею та кулею і площиною однакові і дорівнюють  $f$ .



**Рисунок 7.15**  
**Розв'язок**

Розглядаючи кулю як вільне тіло, прикладемо до неї активну силу  $\vec{G}$ , реакції  $\vec{N}_1$  та  $\vec{N}_2$  з боку площини і балки та сили тертя  $\vec{F}_{\text{тр}1}$  і  $\vec{F}_{\text{тр}2}$ , які виникають між балкою і кулею та кулею і площиною. На кулю діє довільна плоска система сил, яка повинна задовольняти умови рівноваги (6.5). Вибираємо осі координат, як показано на Рис. 7.15, і складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad N_1 - G - N_2 \cos \alpha - F_{\text{тр}2} \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{O_1}(\vec{F}_i) = 0; \quad -F_{\text{тр}1} \cdot R + F_{\text{тр}2} \cdot R = 0.$$

З третього рівняння  $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2}$ .

Ураховуючи, що  $F_{\text{тр}1} = f \cdot N_1$ ,  $F_{\text{тр}2} = f \cdot N_2$ , тоді  $N_1 = N_2$  і перше рівняння набуде вигляду

$$-f \cdot N - f \cdot N \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha = 0$$

або

$$N(\sin \alpha - f(1 + \cos \alpha)) = 0.$$

Оскільки  $N \neq 0$ , тоді  $\sin \alpha - f(1 + \cos \alpha) = 0$ .

Після певних алгебраїчних перетворень отримаємо

$$\alpha_{\max} = 2 \arctg f .$$

### Контрольні запитання

1. Що розуміють під тертям?
2. Назвіть види тертя залежно від характеру відносного руху тіл.
3. Сформулюйте закони тертя ковзання.
4. Що таке коефіцієнт тертя спокою та руху?
5. Що називають кутом тертя і конусом тертя?
6. Чим відрізняється коефіцієнт тертя ковзання від коефіцієнта тертя кочення?
7. Які фактори впливають на коефіцієнти тертя ковзання і кочення?
8. Як визначають момент опору кочення?
9. Чому дорівнює максимальне значення статичної сили тертя ковзання?
10. Як визначають динамічну силу тертя ковзання?
11. Коли настає явище заклинювання?
12. Запишіть умову чистого кочення.
13. Коли виникає тертя вертіння?
14. Як визначають момент тертя вертіння для різних поверхонь контакту?

## Глава 8. Розрахунок плоских ферм

### 8.1. Основні поняття про плоскі ферми

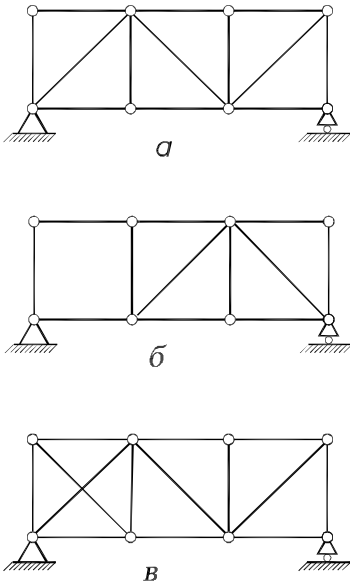


Рисунок 8.1

**Фермою** називають геометрично незмінну конструкцію, яка складається з прямолінійних стержнів, з'єднаних на кінцях шарнірами (Рис. 8.1).

Ферми використовують як несучі конструкції в різних спорудах, наприклад: у мостах, у перекриттях будинків, у підйомних кранах, каркасах літаків тощо. Основна задача при розрахунку ферм полягає у визначенні внутрішніх зусиль, які виникають у стержнях ферми під дією зовнішніх активних сил.

Місця з'єднання стержнів ферми називають **вузлами**.

Стержні, розміщені по верхньому контуру ферми, утворюють верхній пояс, а по нижньому – нижній пояс.

Вертикальні стержні називають **стояками**, а нахилені – **розкосами**.

Ферми бувають просторові й плоскі. Якщо осі всіх стержнів ферми розміщені в одній площині, таку ферму називають **плоскою**. У цій главі обмежимося розглядом лише плоских ферм.

Розрахунок ферм істотно спрощується, якщо зробити такі **допущення**:

- 1) усі стержні ферми з'єднані шарнірно;
- 2) тертя в шарнірах відсутнє;

3) задані сили, що діють на ферму, розміщені у площині ферми і прикладені у вузлах;

4) власна вага стержнів мала порівняно з заданими силами і нею можна знехтувати або розподілити вагу стержнів по вузлах ферми.

У реальних фермах стержні з'єднані жорстко за допомогою електрозварювання, клепання тощо. Проте зроблені допущення про спосіб з'єднання стержнів ферми дозволяють знайти наближене значення зусиль із достатньою точністю. Дійсно, за умов, що всі зусилля прикладені у вузлах ферми й що відсутнє тертя у шарнірах, кожен стержень перебуватиме під дією тільки двох сил, які прикладені до його кінців. Згідно з першою аксіомою статички у стані рівноваги лінія дії цих двох сил повинна проходити через точки їх прикладання. Тому сили, прикладені до стержня ферми, будуть обов'язково напрямлені вздовж стержня і спричинятимуть його стиск або розтяг.

Зроблені допущення виправдані тим, що, по-перше, тертя в шарнірах мале порівняно із заданими силами й ним можна знехтувати; по-друге, якщо сила не прикладена у вузлах ферми, то її можна розділити на складові, що будуть прикладені у вузлах.

Для того, щоб ферму можна було використовувати як несучу конструкцію в інженерних спорудах, необхідно забезпечити її жорсткість. Для забезпечення жорсткості ферми (тобто виключення відносних переміщень стержнів) необхідно, щоб число стержнів дорівнювало

$$N = 2n - 3 \quad (8.1)$$

де  $n$  число вузлів ферми.

Рівняння (8.1) називають **умовою жорсткості ферми**. Якщо число стержнів  $N < 2n - 3$ , то конструкція буде геометрично змінною (Рис. 8.1,б), а якщо  $N > 2n - 3$ , то ферма буде містити зайві стержні (Рис. 8.1, в).

Зауважимо, що умова жорсткості ферми (8.1) дійсна для плоскої ферми і є умовою статичної означеності ферми. Якщо



ферма містить зайві стержні, то задача про визначення зусиль є статично неозначеною.

У курсі теоретичної механіки розглядають лише статично означені ферми.

Існує три основних методи визначення зусиль у стержнях статично означених ферм: метод вирізання вузлів, метод Ріттера й графічний метод побудови діаграми Максвелла-Кремони. Останній метод у цьому підручнику не наведений.

## 8.2. Метод вирізання вузлів

Суть методу вирізання вузлів полягає в тому, що розглядаємо рівновагу кожного вузла окремо, для чого умовно вирізаємо вузли ферми, прикладаємо до них відповідні зовнішні сили й реакції стержнів і складаємо рівняння рівноваги сил. Оскільки на початку розрахунку ферми невідомо, які стержні розтягнуті, а які стиснуті, то умовно допускаємо, що всі стержні розтягнуті. Тому реакції стержнів направляємо від вузлів. Якщо в результаті обчислень отримаємо відповідь зі знаком мінус, то відповідні стержні стиснуті. Знайдені реакції стержнів за модулем дорівнюють внутрішнім зусиллям у стержнях.

Послідовність розгляду вузлів визначають за такою умовою: число невідомих сил, прикладених до вузла, не повинно перевищувати кількості рівнянь рівноваги сил, тобто двох.

Проілюструємо цей метод на конкретному прикладі.

**Задача 8.1.** Знайти методом вирізання вузлів зусилля у стержнях ферми, зображеної на рис. 8.2, якщо до вузла  $D$  ферми прикладена вертикальна сила  $F = 40 \text{ кН}$ . У цій фермі число вузлів  $n = 8$ , а число стержнів  $m = 13$ . Отже, умова (8.1) виконується і ферма є жорсткою без зайвих стержнів, тобто статично визначуваною.

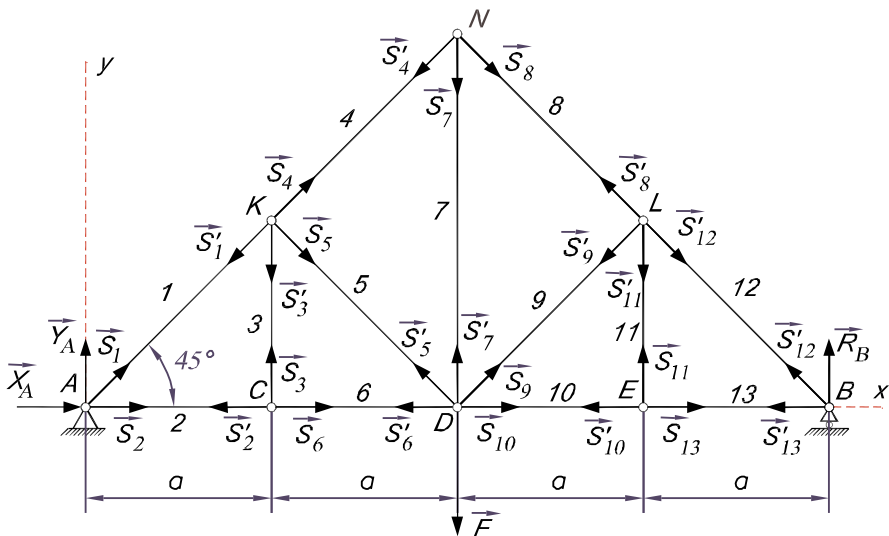


Рисунок 8.2

### Розв'язок

Складемо рівняння рівноваги для ферми в цілому і знайдемо реакції опор  $A$  і  $B$ :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - F = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -F \cdot 2a + R_B \cdot 4a = 0;$$

$$X_A = 0; \quad R_B = Y_A = 20 \text{ кН}.$$

Переходимо до визначення зусиль у стержнях. Умовно вирізаємо всі вузли ферми, зберігаючи послідовність, вказану вище.

Реакції стержнів позначимо  $\vec{S}'_i$ . На підставі закону рівності дії й протидії  $\vec{S}'_i = -\vec{S}_i$ . Розрахунок почнемо з вузла  $A$ , в якому прикладені лише дві невідомі сили  $\vec{S}'_1$  і  $\vec{S}'_2$ .

$$\text{Вузл А: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; X_A + S_2 + S_1 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; Y_A + S_1 \sin 45^\circ = 0; S_1 = -28,2\kappa H; S_2 = 20\kappa H.$$

$$\text{Вузл С: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_6 - S'_2 = 0; S_6 = 20\kappa H;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_3 = 0; S_3 = 0.$$

$$\text{Вузл К: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S'_1 \cos 45^\circ + S_4 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_4 \sin 45^\circ - S'_1 \sin 45^\circ - S'_3 - S_5 \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_4 = -28,2\kappa H; S_5 = 0.$$

$$\text{Вузл N: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_8 \sin 45^\circ - S'_4 \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_7 - S'_4 \cos 45^\circ - S_8 \cos 45^\circ = 0; S_7 = 40\kappa H;$$

$$S_8 = -28,2\kappa H.$$

$$\text{Вузл D: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_{10} - S'_6 - S'_5 \cos 45^\circ + S_9 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S'_7 - F + S'_5 \sin 45^\circ + S_9 \sin 45^\circ = 0; S_9 = 0;$$

$$S_{10} = 20\kappa H.$$

$$\text{Вузл E: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_{13} - S'_{10} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_{11} = 0; S_{13} = 20кН; S_{11} = 0.$$

$$\text{Вузол L: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad ; \quad S_{12} \cos 45^\circ - S'_8 \cos 45^\circ - S'_9 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S'_{11} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad ; \quad S'_8 \sin 45^\circ - S'_9 \sin 45^\circ - S'_{11} - S_{12} \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_{12} = -28,2кН.$$

Отримані зусилля в стержнях 1, 4, 8 і 12 від'ємні, і це означає, що стержні стиснуті.

Для перевірки правильності визначення зусиль у стержнях розглянемо рівновагу сил у вузлі *B*.

$$\text{Вузол B: } \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad ; \quad S'_{12} \sin 45^\circ + R_B = 0.$$

$$R_B = -S'_{12} \sin 45^\circ = -282 \cdot 0,707 \approx 20кН.$$

Отже зусилля у стержнях визначені вірно.

Зусилля в окремих стержнях, як видно з наведеного прикладу, можуть дорівнювати нулю. Такі стержні прийнято називати **нульовими**.

Сформулюємо леми, які дозволять знайти нульові стержні плоскої ферми, не проводячи її розрахунку.

**Лема 1.** Якщо в незавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться два стержні, то зусилля в цих стержнях дорівнюють нулю.

**Лема 2.** Якщо в незавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться три стержні, два з яких розміщені на одній прямій, то зусилля в третьому стержні дорівнює нулю. Зусилля в перших двох однакові. Такий вузол називають Т-подібним.

**Лема 3.** Якщо у вузлі плоскої ферми сходяться два стержні й до вузла прикладена зовнішня сила, лінія дії якої збігається з

віссю одного із стержнів, то зусилля в цьому стержні дорівнює за модулем прикладеній силі, а зусилля в другому стержні дорівнює нулю.

Довести ці леми пропонується самостійно.

Методом вирізання вузлів вигідно користуватися тоді, коли потрібно знайти зусилля у всіх стержнях ферми. А для знаходження зусиль лише в одному або декількох стержнях пропонують використовувати метод Ріттера.

### 8.3. Метод Ріттера

Метод полягає в тому, що після знаходження реакцій опор ферму умовно розрізають на дві частини так, щоб у перерізі було не більше трьох стержнів з невідомими зусиллями. Потім розглядають рівновагу однієї з частин ферми, відкинувши іншу. Дію відкинутої частини заміняють відповідними силами, направляючи їх уздовж розрізаних стержнів від вузлів, тобто вважають, що стержні розтягнуті. Для одержаної плоскої довільної системи сил складають три рівняння рівноваги.

Рівняння доцільно записувати у вигляді рівності нулю суми моментів усіх сил відносно трьох різних точок, що є точками, в яких попарно перетинаються лінії дії розрізаних стержнів. Ці точки називають **точками Ріттера** або **моментними точками**. У кожне з рівнянь моментів відносно трьох точок Ріттера буде входити лише одна невідома.

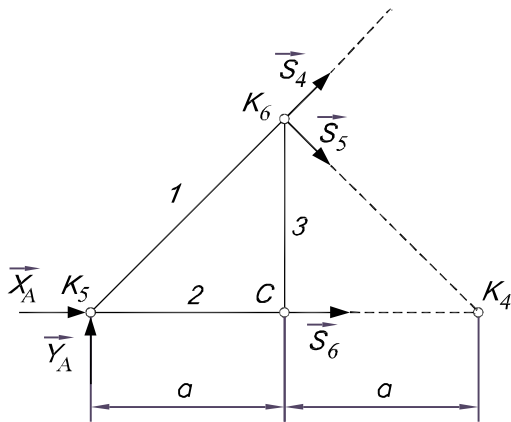


Рисунок 8.3

Покажемо це на прикладі.

**Задача 8.2.** Методом Ріттера визначити зусилля в стержнях 4,5 і 6 ферми, зображеної на рис. 8.3.

### Розв'язок

Реакції опор ферми обчислені в задачі 8.1. ( $X_A = 0$ ;  $Y_A = 20кН$ ;  $R_B = 20кН$ ). Умовно розріжемо ферму на дві частини по стержнях 4,5,6 і розглянемо рівновагу лівої частини (Рис. 8.3). Дію правої частини на ліву заміняємо реакціями  $\vec{S}_4$ ,  $\vec{S}_5$  і  $\vec{S}_6$ . Для довільної плоскої системи сил складаємо три рівняння

$$\sum_{i=1}^n m_{K_4}(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{K_5}(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{K_6}(\vec{F}_i) = 0.$$

де  $K_4, K_5, K_6$  – точки Ріттера.

Індексація точок Ріттера вибрана так, щоб рівняння моментів, записане відносно цієї точки, містило одне невідоме зусилля  $\vec{S}_i$  у стержні під номером  $i$ :

$$\sum_{i=1}^n m_{K_4}(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A 2a - S_4 a \sqrt{2} = 0; \quad S_4 = -28,2кН;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{K_5}(\vec{F}_i) = 0; \quad -S_5 a \sqrt{2} = 0; \quad S_5 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{K_6}(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A a + S_6 a + X_A a = 0; \quad S_6 = 20кН.$$

Аналогічно можна знайти зусилля й в інших стержнях ферми. З наведеного прикладу видно, що рівняння рівноваги не зв'язані між собою, а тому для знаходження зусиль в одному стержні достатньо скласти лише одне з цих рівнянь.

## Контрольні запитання

1. Що називають фермою?
2. Які допущення приймають при розрахунках ферм?
3. Записати умови жорсткості ферми.
4. Назвати всі елементи плоскої ферми.
5. Сформулювати суть методу вирізання вузлів.
6. Сформулювати суть методу Ріттера.

## Глава 9. Центр ваги тіла

### 9.1. Координати центра паралельних сил

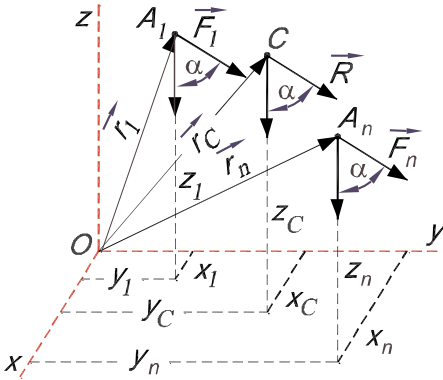


Рисунок 9.1

Поняття про центр паралельних сил є необхідним для розв'язку деяких задач механіки і для визначення центра ваги.

Розглянемо систему паралельних і однако направлених сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , прикладених до твердого тіла в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (Рис. 9.1).

Очевидно, що ця система сил має рівнодійну  $\vec{R}$ , яка направлена так, як і складові сили. Модуль рівнодійної дорівнює

$$R = \sum_{s=1}^n F_s. \quad (9.1)$$

Лінія дії рівнодійної буде проходити через певну точку  $C$ . Якщо всі сили повернути на довільний кут  $\alpha$  в один і той самий бік навколо точок їх прикладання, то рівнодійна повернеться навколо точки  $C$  на той самий кут і в той самий бік.

Точку  $C$ , через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо точок їх прикладання в один і той самий бік і на один і той самий кут, називають **центром паралельних сил**.

Координати точки  $C$  прикладання рівнодійної, тобто координати центра даної системи паралельних сил, позначимо  $x_C, y_C, z_C$ . Повернемо всі сили так, щоб вони стали паралельними осі  $Oz$ . Рівнодійна  $\vec{R}$  також буде паралельна осі



*Oz*. Використовуючи теорему Варіньона, визначимо момент рівнодійної відносно осі *Oy* (Рис. 9.1).

Згідно з цією теоремою момент рівнодійної відносно осі *Oy* дорівнюватиме алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї самої осі:

$$m_y(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n m_y(\vec{F}_i).$$

У нашому випадку

$$R_C x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^n F_i x_i,$$

звідси

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{R}.$$

Аналогічно повертаючи всі сили навколо точок прикладання так, щоб вони стали паралельні осям *Ox* і *Oy* відповідно, отримаємо координати *y<sub>C</sub>* і *z<sub>C</sub>*. Тоді координати центра системи паралельних сил визначають за залежностями:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (9.2)$$

Помноживши залежності (9.2) на одиничні орти  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  і додавши їх, отримаємо формулу для радіус-вектора  $\vec{r}_C = x_C \vec{i} + y_C \vec{j} + z_C \vec{k}$  центра паралельних сил:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (9.3)$$

де  $\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$  – радіус-вектор точки прикладання сили  $\vec{F}_i$ .

## 9.2. Центр ваги твердого тіла

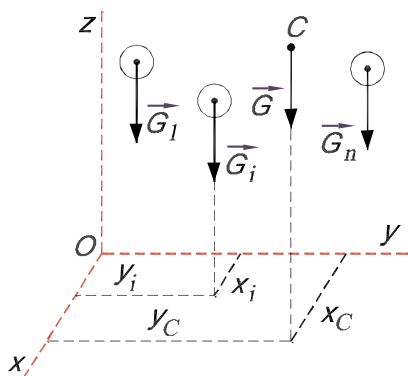


Рисунок 9.2

На всі тіла, що розміщені в межах поля земного тяжіння, діють сили притягання до Землі. Якщо тіло розбити на окремі елементарні частинки малих об'ємів, то на кожну частинку діють сили земного тяжіння, які будуть напрямлені до центра Землі. Але оскільки розміри тіл малі порівняно з радіусом Землі, то ці сили можна вважати паралельними

між собою (Рис. 9.2). Виходячи з цих припущень, можна дати визначення ваги тіла й центра ваги тіла. **Вага тіла** – це рівнодіяна системи паралельних сил, з якими окремі частини тіла притягаються до Землі, а **центр ваги тіла** – центр цієї системи паралельних сил.

Розглянемо деяке тіло і розділимо його на  $n$  елементарних частин, сили притягання яких до Землі позначимо через  $\vec{G}_i$ . Тоді вага тіла

$$G = \sum_{i=1}^n G_i. \quad (9.4)$$

Координати центра ваги твердого тіла визначають як координати центра паралельних сил. Використовуючи залежності (9.2), координати центра ваги тіла визначимо за формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i x_i}{\sum_{i=1}^n G_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n G_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i z_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad (9.5)$$

де  $x_i, y_i, z_i$  – координати  $i$ -ї частини тіла.

### 9.3. Центр ваги однорідного тіла

#### Центр ваги об'єму

Для однорідного тіла, яке займає об'єм  $V$ , можна визначити координати його центра ваги через відомі координати центрів ваги окремих частин тіла. Вагу однорідного тіла визначають за залежністю  $G = \gamma V$ , де  $\gamma$  – густина матеріалу тіла;  $V$  – об'єм тіла. Аналогічно вага кожної частини  $G_i = \gamma V_i$ , де  $V_i$  – об'єм  $i$ -ї частини тіла. Підставимо ці значення в (9.5) і отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{V}, \quad (9.6)$$

де  $x_i, y_i, z_i$  – координати точки прикладання сили  $G_i$ . Величини  $x_C, y_C, z_C$  називають **координатами центра ваги об'єму**.

#### Центр ваги площі

Центром ваги площі вважають центр ваги однорідної тонкої пластини однакової товщини, основа якої займає дану площу.

Розглянемо однорідну тонку пластину товщиною  $h$ , основа якої займає площу  $S$  (Рис. 9.3). Вага однорідної тонкої пластини  $G = \gamma S h$ . Розіб'ємо тонку пластину на елементарні частини. Вага кожної такої частини  $G_i = \gamma S_i h_i$ , де  $S_i$  – площа елементарної частини. Тоді координати центра ваги площі  $S$  на підставі залежностей (9.5) визначають за формулами

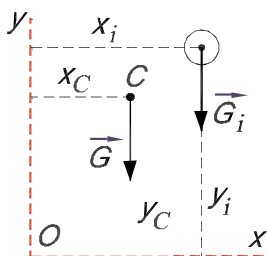


Рисунок 9.3

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_i y_i}{S}, \quad (9.7)$$

де  $x_i, y_i$  – координати центра ваги елементарних площ  $S_i$ .

### Центр ваги лінії

Під центром ваги лінії розуміють центр ваги однорідного тонкого стержня однакового поперечного перерізу, вісь якого збігається з даною лінією.

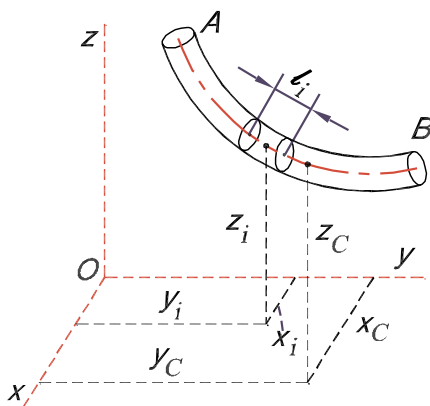


Рисунок 9.4

Розглянемо однорідний тонкий стержень, площа поперечного перерізу якого  $S$ . Вісь цього стержня збігається з лінією  $AB$ , центр ваги якої потрібно знайти (Рис. 9.4).

Вага стержня  $G = \gamma LS$ , де  $L$  – довжина лінії  $AB$ . Розділимо стержень на елементарні частини довжиною  $\ell_i$ .

Вага кожної частини  $G_i = \gamma S \ell_i$ . Координати центра

ваги кожної виділеної частини  $x_i, y_i, z_i$ . Тоді координати центра ваги  $C$  лінії  $AB$  визначають із залежностей (9.5) після відповідних підстановок:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i z_i}{L}. \quad (9.8)$$

Необхідно відзначити, що формули (9.6)-(9.8) є наближеними. Граничним переходом їх можна звести до визначеного інтегралу: для однорідного тіла

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dV}{V};$$

для однорідної тонкої пластини

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dS}{S};$$

для лінії

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dl}{L}.$$

Положення центрів ваги деяких однорідних тіл наведені в табл. 9.1.

## 9.4. Методи знаходження центра ваги

### Експериментальні методи

**Метод підвісу.** Положення центра ваги тіла за цим методом визначають так: підвішують тіло на нитці у довільній точці тіла та продовжують напрям нитки в тілі (прорисовують лінію на поверхні тіла); підвішують тіло на нитці в іншій точці і знову відзначають на тілі продовження нитки. Точка перетину продовжених напрямів нитки на тілі й буде центром ваги тіла. Цей метод дозволяє визначити центр ваги неоднорідного тіла

складної конфігурації.

### Метод зважування.

Використовують для знаходження центра ваги складних тіл значної ваги. Суть методу зважування пояснює рис. 9.5.

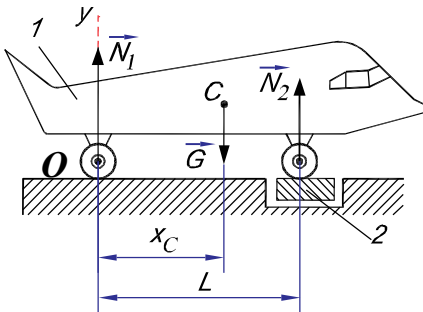
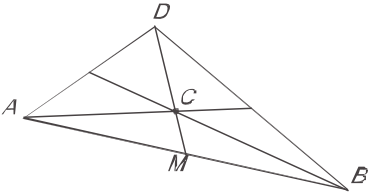
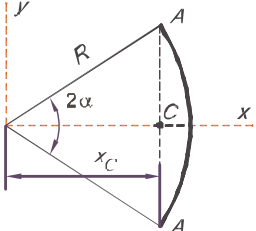
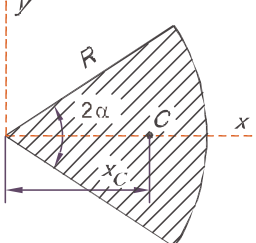
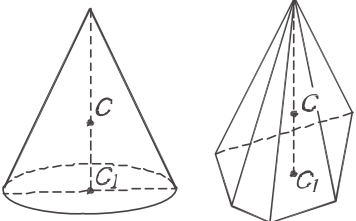


Рисунок 9.5

Таблиця 9.1

Вид тіла	Положення центра ваги
<p data-bbox="244 252 389 288">Трикутник</p> 	<p data-bbox="538 292 997 363">Центр ваги <math>C</math> розміщений у точці перетину медіан:</p> $CM = \frac{1}{3} DM$
<p data-bbox="247 523 385 560">Дуга кола</p> 	<p data-bbox="546 584 992 655">Центр ваги <math>C</math> розміщений на осі симетрії <math>Ox</math>:</p> $y_C = 0; x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$
<p data-bbox="199 837 430 874">Круговий сектор</p> 	<p data-bbox="546 903 992 975">Центр ваги <math>C</math> розміщений на осі симетрії <math>Ox</math>:</p> $y_C = 0; x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$
<p data-bbox="183 1155 445 1192">Піраміда або конус</p> 	<p data-bbox="521 1187 1014 1299">Центр ваги розміщений на лінії, яка з'єднує вершину <math>A</math> піраміди або конуса з центром ваги <math>C_1</math> основи:</p> $CC_1 = \frac{1}{4} AC_1$

Спочатку знаходять вагу тіла. Для цього тіло 1 почергово встановлюють точками опори на вагу 2 і визначають величини  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_2$ .

Вимірюють відстань  $L$  між точками опори. Тоді координату центра ваги  $x_C$  тіла можна визначити з рівнянь рівноваги

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad N_1 + N_2 - G = 0; \quad G = N_1 + N_2;$$

$$\sum_{i=1}^n m_0(\vec{F}_{iy}) = 0; \quad N_2 L - G x_C = 0; \quad x_C = \frac{N_2 L}{G}.$$

### Метод симетрії

**Лема.** Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр геометричної симетрії, то центр ваги цього тіла лежить у площині, на осі або у центрі симетрії.

Доведення леми пропонуємо провести самостійно.

### Метод розбиття

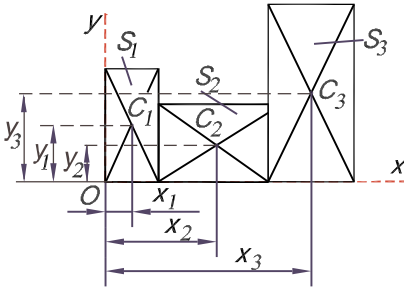


Рисунок 9.6

Положення центра ваги тіла можна визначити, якщо розбити його на такі частини, центри ваги яких відомі, або їх легко можна визначити. Нехай потрібно визначити координату  $x_C$  центра ваги деякої плоскої фігури (Рис. 9.6). Розділимо фігуру на три частини, для яких координати центрів ваги

$C_1(x_1, y_1), C_2(x_2, y_2), C_3(x_3, y_3)$  та площі  $S_1, S_2, S_3$  легко визначити, коли відомі геометричні розміри. Тоді координати центра ваги обчислюють за формулами (9.7):

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3}, \quad y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

### Метод доповнення (метод отворів або від'ємних площ)

Цей метод є частковим випадком методу розбиття і його використовують для тіл, які мають отвори (Рис. 9.7). Знаючи площі  $S_1$  (усієї фігури) і  $S_2$  (вирізаної з фігури частини), а також координати  $y_1$  і  $y_2$  їх центрів ваги, можна вирахувати координати центра ваги плоскої фігури з отвором, приймаючи площу вирізаної частини від'ємною:

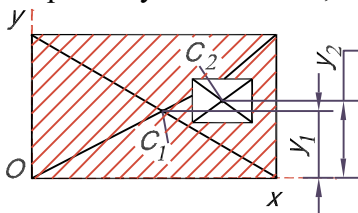


Рисунок 9.7

$$y_C = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2}.$$

### Метод інтегрування

Якщо тіло не можна розділити на кілька частин, положення центрів ваги яких відомі, то тіло ділять на елементарні частини, число яких прямує до нескінченності, а розміри кожної частини прямують до нуля. Тоді суми у виразах (9.6), (9.7), (9.8) будуть інтегралами за об'ємом, площею або довжиною.

Отже, вирази для координат центра ваги об'єму наберуть вигляду:

$$x_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV; \quad y_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV; \quad z_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV, \quad (9.9)$$

де  $V = \iiint_{(V)} dV$  – об'єм тіла.

Координати центра ваги плоскої фігури



$$x_C = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dS ; \quad y_C = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y dS , \quad (9.10)$$

де  $S = \iint_{(S)} dS$  – площа плоскої фігури.

Координати центра ваги лінії

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x d\ell ; \quad y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y d\ell ; \quad z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z d\ell , \quad (9.11)$$

де  $L = \int_{(L)} d\ell$  довжина лінії.

### Контрольні запитання

1. Як визначити модуль і напрям рівнодійної системи паралельних сил?
2. Що називають центром системи паралельних сил і центром ваги тіла?
3. Де розміщений центр ваги фігур, які мають площину, вісь або центр симетрії?
4. Де розміщений центр ваги прямокутника, паралелограма, трикутника, круга, кулі, конуса, піраміди?
5. Як визначають центр ваги твердого тіла?
6. Як визначають центр ваги об'єму, площі, лінії?
7. Назвіть методи знаходження центра ваги тіл.
8. Чим відрізняються метод підвісу від методу зважування?
9. Напишіть інтегральні формули для визначення координат центра ваги.
10. Як визначають центр ваги трикутника, дуги кола та площі кругового сектора?

## РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА

**Кінематика** – це наука про механічний рух матеріальних тіл з погляду геометрії без урахування сил, прикладених до цих тіл. Це означає, що основною задачею кінематики є встановлення законів механічного руху та визначення і обчислення кінематичних величин, які характеризують рух тіла загалом і рух кожної його точки зокрема.

Кінематика є тією частиною теоретичної механіки, яка класифікує різні види механічного руху матеріальних тіл і майже повністю розв'язує першу задачу теоретичної механіки, бо за встановленим законом руху визначають необхідні кінематичні величини, які в динаміці будуть безпосередньо зв'язані з силами, що діють на матеріальні тіла.

З іншого боку кінематика має і самостійне значення, як теоретична база для загально-інженерних та спеціальних дисциплін, в яких розв'язують задачі з кінематичного аналізу та синтезу різноманітних механізмів та машин.

### Глава 10. Кінематика точки

#### 10.1. Закон руху точки

**Законом механічного руху** будь-якого тіла і зокрема точки називають функціональну залежність положення тіла чи точки від часу. Закон руху точки можна задати у трьох формах: векторній, координатній та натуральній (Рис. 10.1).

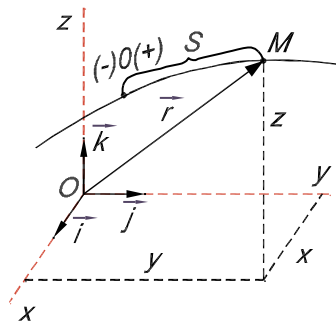


Рисунок 10.1

#### Векторна форма задання закону руху точки

Нехай у просторі задана інерційна система відліку та тіло ві-

дліку, з деякою точкою  $O$  якого зв'язана система координат  $Oxyz$  та прилад для вимірювання часу  $t$ . Для визначеності приймемо **ортонормовану декартову систему координат** з базисом  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . Проведемо з точки  $O$  у рухому точку  $M$  радіус-вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , який однозначно визначає положення точки  $M$  (Рис. 10.1).

Оскільки для будь-якого моменту часу  $t$  радіус-вектор  $\vec{r}$  є однозначно визначеним, тому  $\vec{r}$  є однозначною функцією часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (10.1)$$

Вираз (10.1) є **законом руху точки  $M$  у векторній формі**. Криву, яку описує точка  $M$  у просторі, називають **траєкторією руху точки або годографом радіуса-вектора  $\vec{r}$** .

### Координатна форма закону руху точки

Під час руху точки  $M$  у просторі кожному моменту часу  $t$  відповідає визначена сукупність її координат  $x, y, z$  (Рис. 10.1). Отже ці координати є однозначними функціями часу  $t$ :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (10.2)$$

Залежності (10.2), які однозначно визначають положення точки  $M$  у просторі, називають **кінематичними рівняннями руху точки**. Водночас ці залежності є **законом руху точки у координатній формі**.

Рівняння руху (10.2) можна розглядати як задані у параметричній формі рівняння траєкторії точки  $M$ , в яких параметром є час  $t$ . Наприклад, виразивши час  $t$  з третього рівняння (10.2), отримаємо:  $t = \varphi(z)$ . Підставляючи тепер це співвідношення в перші два рівняння(10.2), матимемо:

$$x = x[\varphi(z)], \quad y = y[\varphi(z)]. \quad (10.3)$$

Рівняння (10.3) явно не залежать від часу  $t$  та визначають траєкторію точки  $M$  у тривимірному просторі.

Під час руху точки  $M$  на площині (наприклад, коли  $z = C = const$ ), виконуючи таку ж послідовність дій, отримаємо  $t = \psi(y)$  та

$$x = x[\psi(y)], \quad (10.4)$$

тобто траєкторію руху точки на площині  $z = C = const$ .

Найпростіший випадок руху - рух точки  $M$  по прямій лінії. У цьому разі одну з координатних осей системи координат (наприклад,  $x$ ) можна направити вздовж цієї прямої. Тоді:  $y = C_1 = const$ ,  $z = C_2 = const$  і

$$x = x(t). \quad (10.5)$$

На рис. 10.2 показані траєкторії руху точки, задані такими кінематичними рівняннями руху:  $x = 3 \sin t$ ,  $y = 2 \cos t$ ,  $z = 0$  (Рис. 10.2, а);  $x = 3 \sin(2t)$ ,  $y = 2 \cos(3t)$ ,  $z = 0$  (Рис. 10.2, б) та  $x = e^{0,1t} \cos t$ ,  $y = e^{0,05t} \sin t$ ,  $z = t$  (Рис. 10.2, в).

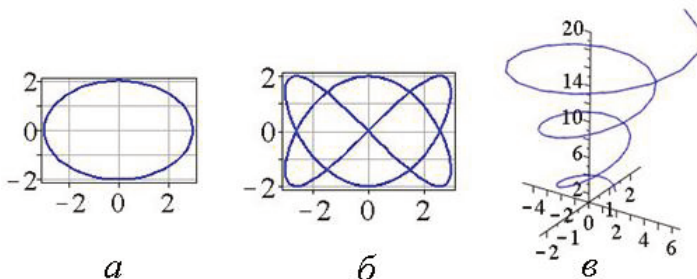


Рисунок 10.2

### Закон руху точки у натуральній формі

Для того, щоб задати закон руху точки  $M$  у натуральній формі, необхідно визначити траєкторію точки і закон її руху по цій траєкторії. Рух точки у цьому разі розглядають відносно деякої умовно нерухомої системи відліку.

Нехай задана траєкторія точки, а також деяка точка  $O$ , що належить цій траєкторії. Точку  $O$  назвемо точкою відліку відстані  $s$ .

Довільно виберемо додатній напрям відліку відстані вздовж траєкторії (Рис. 10.1). Очевидно, що від'ємний напрям буде протилежним до додатного.

Задамо також початок відліку часу. Найчастіше за  $t = 0$  приймають момент часу початку руху точки  $M$  або момент часу, коли рухома точка  $M$  проходить через точку  $O$ . Приймемо, що до того моменту часу, коли відбудеться ця подія, час вважати від'ємним, а після – додатнім.

Отже, з урахуванням прийнятих положень **закон руху точки у натуральній формі** задають залежністю

$$s = s(t). \quad (10.6)$$

Слід зазначити, що відстань  $s$ , яку визначають відповідно до (10.6), не зв'язана з шляхом  $\ell$ , пройденим точкою  $M$  за час  $t$ , оскільки за початок відліку відстаней можна прийняти довільну точку траєкторії, рух точки може бути коливним тощо.

### **Взаємозв'язок різних форм закону руху точки**

Зауважимо, що траєкторія руху точки є годографом радіус-вектора точки  $M$  під час її руху у просторі. Тоді вираз (10.1) – це рівняння годографа у параметричній формі, де параметром є час  $t$ . Отже

$$r_x = r_x(t), r_y = r_y(t), r_z = r_z(t), \quad (10.7)$$

де  $r_x, r_y, r_z$  - проекції радіуса-вектора точки  $M$  на осі системи координат  $Oxyz$ . Проте координати точки  $M$  дорівнюють проекціям її радіуса-вектора, а значить рівняння (10.2) та (10.7) є еквівалентними. Тоді

$$x = r_x(t), y = r_y(t), z = r_z(t), \quad (10.8)$$

що дозволяє від закону руху точки у векторній формі перейти до закону руху у координатній формі.

Очевидно, є справедливим і зворотний перехід від закону руху, заданого у координатній формі, до закону руху у векторній формі. Дійсно, якщо система координат  $Oxyz$  має ба-

зис  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , тоді

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (10.9)$$

Для того, щоб встановити взаємозв'язок закону руху точки, заданого у натуральній формі, з законами руху у векторній чи координатній формах, достатньо встановити такий зв'язок з одним з них.

З курсу диференціальної геометрії відомо, що диференціал дуги кривої  $ds$  в декартових координатах  $Oxyz$  визначається співвідношенням

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (10.10)$$

Виберемо початковий момент часу  $t = t_0$ . Цьому моменту часу відповідає визначена точка траєкторії  $M_0$ , координати якої

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0). \quad (10.11)$$

Тоді 
$$s = s_0 \pm \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (10.12)$$

де  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$  - похідні координат від часу.

Вибір знаку перед інтегралом однозначно визначається вибором додатного напрямку відліку відстані вздовж траєкторії.

Перехід від закону руху, заданого у натуральній формі, до законів у координатній або векторній формах також визначений. Проте такий перехід достатньо складний, тому що необхідно інтегрувати рівняння Рікатті, і у цьому підручнику не наведений.

**Задача 10.1.** Закон руху точки у векторній формі має вигляд

$$\vec{r} = \vec{i} R \cos \pi t^2 + \vec{j} R \sin \pi t^2.$$

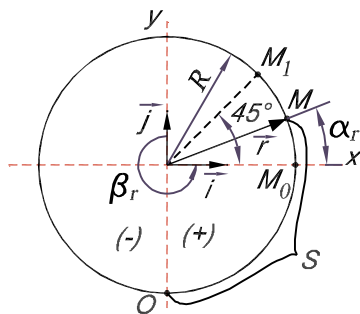


Рисунок 10.3

Проаналізувати рух і подати закон руху у координатній та натуральній формах (Рис. 10.3).

### Розв'язок

Проекції радіус-вектора точки на координатні осі

$$r_x = R \cos \pi t^2, \quad r_y = R \sin \pi t^2.$$

Модуль радіус-вектора

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(R \cos \pi t^2)^2 + (R \sin \pi t^2)^2} = R.$$

Оскільки модуль вектора  $\vec{r}$  величина постійна і дорівнює  $R$ , то точка рухається по колу цього радіуса. На початку руху, при  $t = 0$ ,  $r_x = R$ ,  $r_y = 0$ , тобто точка розміщена у положенні  $M_0(R, 0)$ , а при  $t = 0,5$  с отримаємо

$$r_x = R \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r_y = R \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha_r = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta_r = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тобто, точка перебуває у положенні  $M_1$ , де  $\alpha_r = 45^\circ$ .

Підставляючи інші моменти часу, будемо послідовно визначати положення точки в ці моменти часу.

На підставі формули (10.8), запишемо закон руху точки в координатній формі (10.2)

$$x = R \cos \pi t^2, \quad y = R \sin \pi t^2.$$

Очевидно, при  $t=0$  і при  $t= 0,5$  с одержимо, що точка в ці моменти перебуває відповідно в положеннях  $M_0(R, 0)$  і

$$M_1\left(R \frac{\sqrt{2}}{2}, R \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Щоб записати закон цього руху точки у натуральній формі, знайдемо рівняння траєкторії, виключаючи час з рівнянь руху в координатній формі. Отримаємо

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

тобто точка рухається по колу радіуса  $R$ .

Для дугової координати  $s$  візьмемо початок відліку, напри-

клад, у точці  $O$ , тоді при  $t\theta$   $s = s_0 = \frac{\pi R}{2}$  (четвертина кола), бо точка в цей час перебуває в положенні  $M_0$ . Додатний знак для  $s$  прийемо у бік руху точки (проти годинникової стрілки по колу) і тоді за формулою (10.12) матимемо

$$s = \frac{\pi R}{2} + \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

І, оскільки  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -2\pi R t \sin \pi t^2$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -2\pi R t \cos \pi t^2$ ,

то 
$$s = \frac{\pi R}{2} + \int_0^t 2\pi R t dt = \frac{\pi R}{2} + \pi R t^2.$$

Очевидно, що при  $t=0$  і при  $t=0,5$  с, точка перебуває, відповідно, у положеннях:  $M_0$ , де  $s_0 = \frac{\pi R}{2}$  та в  $M_1$ , де  $s = \frac{3}{4} \pi R$  по дузі кола.

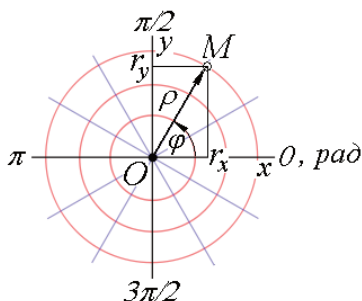


Рисунок 10.4

Поряд з декартовими в механіці часто використовують інші системи координат. Наприклад, для вивчення руху точки  $M$  на площині можна використати **полярну систему координат**  $\{\rho, \varphi\}$  (Рис. 10.4).

Тоді кінематичні рівняння руху точки мають вигляд

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (10.13)$$

Перехід від полярної системи координат до декартової здійснюють з урахуванням таких залежностей

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (10.14)$$

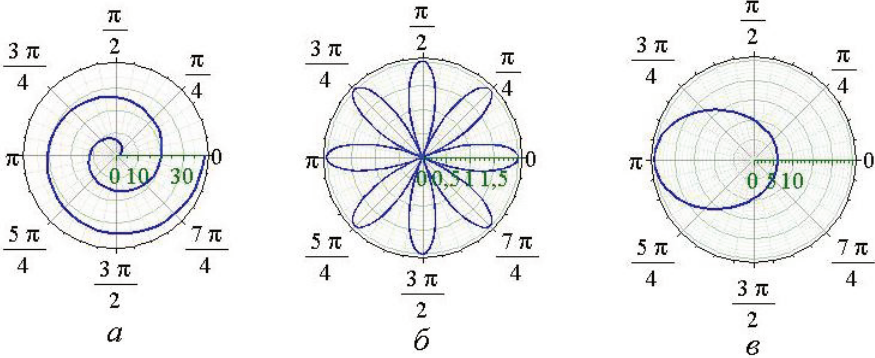
Піднявши вирази (10.14) до квадрату і додавши їх, отримаємо:  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . З урахуванням того, що  $\rho \geq 0$ , формули зворотного переходу від декартової системи координат до полярної



такі:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x > 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi, x > 0, y < 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, x < 0; \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0; \\ \frac{3\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (10.15)$$

На рис. 10.5 показані траєкторії руху точки у полярній системі координат:  $\rho = 2 + 3t$ ,  $\varphi = t$  (спіраль Архімеда) (Рис. 10.5, а);  $\rho = 2 \cos(4t)$ ,  $\varphi = t$  (полярна роза) (Рис. 10.5, б);  $\frac{10}{1 + 0,6 \cos t}$ ,  $\varphi = t$  (конічний переріз) (Рис. 10.5, в).



**Рисунок 10.5**

## 10.2. Швидкість точки

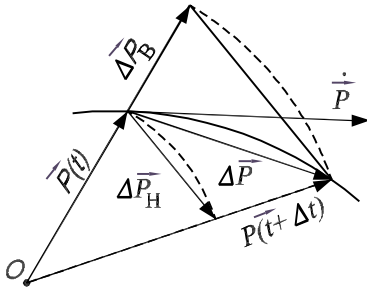
### Векторна похідна вектора

Розглянемо змінний за часом вектор

$$\vec{P} = P_x \vec{i}_x + P_y \vec{j} + P_z \vec{k},$$

$$\text{де } P_x = P_x(t), \quad P_y = P_y(t),$$

$P_z = P_z(t)$ . Відкладемо його від нерухомого центра  $O$  (Рис. 10.6).



Геометричне місце кінців вектора  $\vec{P}$  називають його годографом.

Рисунок 10.6

Якщо розглянути значення вектора  $\vec{P}$  у момент часу  $t$  і у момент часу  $t + \Delta t$ , то вектор  $\Delta \vec{P}$  є векторною зміною вектора  $\vec{P}$  за час  $\Delta t$  і, як видно з рис. 10.6, він є геометричною сумою зміни вектора  $\vec{P}$  за напрямком  $\Delta \vec{P}_H$  і зміни вектора  $\vec{P}$  за величиною  $\Delta \vec{P}_B$ , тобто,

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{P}_H + \Delta \vec{P}_B. \quad (10.16)$$

Векторною похідною вектора  $\vec{P}$  називають бистроту зміни цього вектора як за напрямком, так і за величиною, тобто

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{P}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_H}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_B}{\Delta t}, \quad (10.17)$$

Геометрично векторна похідна вектора  $\vec{P}$  – це вектор, напрямлений по дотичній до годографа вектора і, коли змінний вектор сталий лише за модулем, то годографом вектора буде крива на сфері радіуса, яка дорівнює довжині вектора  $\vec{P}$ , а тому похідна вектора напрямлена перпендикулярно до самого вектора.

Очевидно, що векторна похідна вектора дорівнює нулю, якщо вектор сталий,  $\vec{P} = \text{const}$  за величиною і за напрямком.

Аналітично векторну похідну вектора  $\vec{P}$  обчислюють за формулою

$$\dot{\vec{P}} = \dot{P}_x \vec{i} + \dot{P}_y \vec{j} + \dot{P}_z \vec{k}, \quad (10.18)$$

а це означає, що її модуль і напрямні косинуси визначають за відомими формулами.

Неважко показати, що:

1) векторна похідна геометричної суми (різниці) двох векторів дорівнює геометричній сумі (різниці) похідних цих векторів

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \dot{\vec{P}}_1 + \dot{\vec{P}}_2; \quad (10.19)$$

2) векторна похідна скалярного чи векторного добутку двох векторів дорівнює сумі відповідних добутків похідної першого вектора на другий вектор і першого вектора на похідну другого вектора:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2) = \dot{\vec{P}}_1 \cdot \vec{P}_2 + \vec{P}_1 \cdot \dot{\vec{P}}_2; \quad (10.20)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 \times \vec{P}_2) = \dot{\vec{P}}_1 \times \vec{P}_2 + \vec{P}_1 \times \dot{\vec{P}}_2.$$

### Поняття швидкості точки та її обчислення

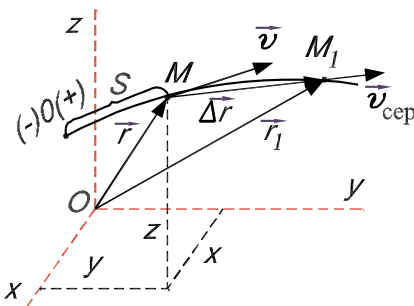


Рисунок 10.7

Якщо розглянемо рух матеріальної точки, то за деякий проміжок часу  $\Delta t$  з даного положення точка переміститься в інше положення  $M_1$  (Рис. 10.7).

Вектор  $\overline{MM_1}$  називають переміщенням точки за час  $\Delta t$ .

Відношення  $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$  показує, як

швидко точка перемістилася з положення  $M$  у положення  $M_1$  і його називають **середньою швидкістю точки** за час  $\Delta t$  :

$$\vec{v}_{\text{сеп}} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (10.21)$$

**Швидкістю точки** в даний момент часу називають бистроту переміщення точки в цей момент часу, тобто, швидкість точки дорівнює

граничному значенню відношення  $\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$ , коли  $t \rightarrow 0$ ,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} \quad (10.22)$$

і напрямлена по дотичній до траєкторії точки в бік її руху.

Обчислення швидкості із закону руху у векторній і координатній формах майже однакове.

Відповідно до рис. 10.7 залежність (10.22) запишемо у вигляді

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (10.23)$$

Отже, **швидкість точки дорівнює векторній похідній по часу від радіус-вектора точки**, а це означає, що

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \dot{r}_x\vec{i} + \dot{r}_y\vec{j} + \dot{r}_z\vec{k},$$

оскільки для постійних векторів  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{k}$  похідні по часу  $\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0$ . Отже,

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}, v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad (10.24)$$

$$\cos \alpha_v = \frac{\dot{x}}{v}, \cos \beta_v = \frac{\dot{y}}{v}, \cos \gamma_v = \frac{\dot{z}}{v}. \quad (10.25)$$

Формули (10.16) і (10.17) повністю визначають вектор шви-

дкості точки, коли закон руху заданий у векторній (10.1) чи (10.9), або в координатній (10.2) формах.

Виходячи з формули (10.23) для швидкості точки та порівнюючи з нею формулу (10.18) для векторної похідної, слід зазначити, що векторна похідна по часу від будь-якого вектора є швидкістю переміщення кінця цього вектора по його годографу.

Обчислення швидкості точки із закону руху в натуральній формі (10.6) проводять у такій послідовності: напрям швидкості визначають за дотичною до траєкторії в бік руху точки; величину швидкості вважають алгебраїчною величиною, яка дорівнює

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad (10.26)$$

оскільки величина вектора  $\overrightarrow{MM_1}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  дорівнює величині елемента дугової координати  $|\Delta s|$ .

Отже **швидкість точки дорівнює похідній по часу від дугової координати  $s$**  і при  $v > 0$  вказує на рух точки у бік збільшення, а при  $v < 0$  – у бік зменшення дугової координати.

**Задача 10.2.** Використаємо дані задачі 10.1. Якщо взяти закон руху в векторній формі  $\vec{r} = R\cos \pi t^2 \vec{i} + R\sin \pi t^2 \vec{j}$ , то в координатній формі отримаємо

$$x = R\cos \pi t^2, \quad y = R\sin \pi t^2.$$

Записати вираз для швидкості точки в будь-який момент часу і обчислити швидкість при  $t=0,5$  с (Рис.10.8).

### Розв'язок

Для швидкості точки в будь-який момент часу за формулами (10.23) і (10.24) отримаємо вирази

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\vec{i} 2\pi t R \cos \pi t^2 + \vec{j} 2\pi t R \sin \pi t^2,$$

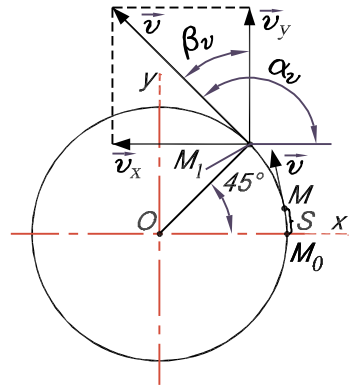


Рисунок 10.8

$$v_x = \dot{x} = -2\pi t R \sin \pi t^2, \quad v_y = \dot{y} = 2\pi t R \cos \pi t^2, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2\pi R t,$$

$$\cos \alpha_v = \frac{\dot{x}}{v} = -\sin \pi t^2, \quad \cos \beta_v = \frac{\dot{y}}{v} = \cos \pi t^2.$$

Значення швидкості при  $t=0,5$  с

$$\vec{v} = -\vec{i} \frac{\sqrt{2}}{2} \pi R + \vec{j} \frac{\sqrt{2}}{2} \pi R, \quad v_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi R, \quad v_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi R, \quad v = \pi R,$$

$$\cos \alpha_v = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta_v = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_v = 135^\circ, \quad \beta_v = 45^\circ.$$

Якщо закон руху точки заданий у натуральній формі (див. задачу 10.1)  $s = \frac{\pi R}{2} + \pi R t^2$ , то за формулою (10.26) отримаємо

$$v = \dot{s} = 2\pi R t.$$

Швидкість напрямлена по дотичній до траєкторії в бік руху точки і коли  $t=0,5$  с швидкість  $v = \pi R$ .

### 10.3. Прискорення руху точки

#### Геометрія траєкторії точки

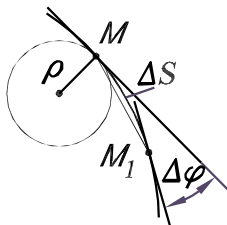


Рисунок 10.9

Для вивчення поняття прискорення точки та його обчислення необхідно розглянути деякі параметри геометричної будови траєкторії точки. До таких параметрів відносять кривизну, радіус кривизни та **натуральні осі координат** у кожній окремій точці траєкторії. Розглянемо будову кривої у точці  $M$  (Рис. 10.9).

Якщо візьмемо нескінченно близьку до точки  $M$  точку  $M_1$ , то хорда  $MM_1$  при необмеженому наближенні точки  $M_1$  до точки  $M$  займе якесь граничне положення, яке буде дотичне до кривої в точці  $M$ .

Якщо тепер у точках  $M$  і  $M_1$  провести дотичні, то кут  $\Delta\varphi$  між ними називають кутом суміжності, а відношення кута сумі-

жності до дуги  $MM_1 = \Delta s$ , коли  $\Delta s \rightarrow 0$ , називають кривизною  $k$  кривої в точці  $M$ , тобто

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (10.27)$$

Величину, обернену до кривизни  $k$ , називають **радіусом кривизни  $\rho$**  кривої в точці  $M$

$$\rho = \frac{1}{k}. \quad (10.28)$$

Радіусом кривизни кривої в даній точці  $M$  є радіус кола, що проходить через точку  $M$  та дві сусідні з нею з обох боків точки, коли останні необмежено наближаються до точки  $M$ .

Якщо з точки  $M$  провести одиничний орт напрямку дотичної  $\vec{\tau}$  та одиничний орт дотичної у точці  $M_1$ , то вони утворюють трикутник  $Mab$ , площа якого при необмеженому наближенні точки  $M_1$  до точки  $M$  займе у просторі площину I ( $n\tau$ ) (Рис. 10.10), яка буде **дотичною** до кривої в точці  $M$ . Цю площину можна уявити як граничне положення площини, що проходить через точку  $M$  і дві сусідні з нею з обох боків точки, коли останні необмежено наближаються до точки  $M$ .

Площину II ( $h$ ), перпендикулярну до дотичної в точці  $M$ , називають **нормальною**, а пряму її перетину з прилеглою площиною - **головною нормаллю** в точці  $M$ .

Площину III ( $\tau b$ ) у точці  $M$ , перпендикулярну до головної нормалі, називають

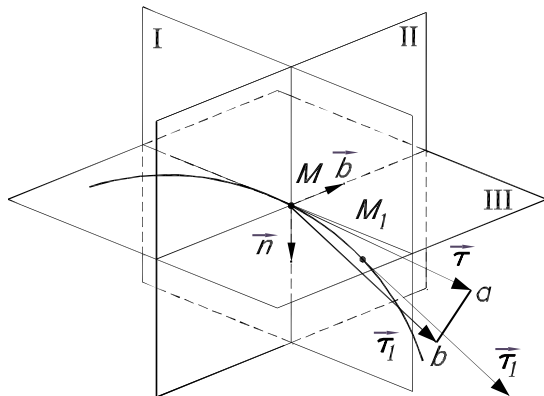


Рисунок 10.10

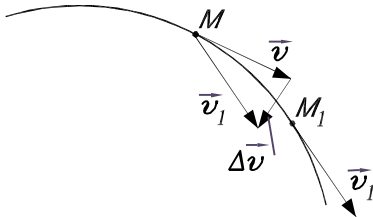
**спрямною**, а пряму її перетину з нормальною площиною називають **бінормаллю** кривої в точці  $M$ .

Одиничні орти дотичної  $\vec{\tau}$ , головної нормалі  $\vec{n}$  і бінормалі  $\vec{b}$  утворюють натуральні осі координат кривої в точці  $M$ .

Вивчаючи рух точки по даній траєкторії будемо вважати, що орт  $\vec{\tau}$  напрямлений у бік зростання дугової координати точки, орт  $\vec{n}$  напрямлений завжди у бік увігнутості траєкторії, а орт  $\vec{b}$  напрямлений за правилом векторного добутку  $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ .

### Прискорення точки та його обчислення

Прискоренням точки називають бистроту зміни швидкості точки з часом. Якщо швидкість точки за проміжок часу  $\Delta t$  змінюється як вектор на величину  $\Delta \vec{v}$  (Рис. 10.11), то відношення  $\Delta \vec{v}$  до  $\Delta t$  називають **середнім прискоренням** точки за час  $\Delta t$ .



$$\vec{a}_{\text{сер}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

**Рисунок 10.11**

Прискорення точки у даній момент часу  $t$  дорівнює граничному значенню відношення  $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ , коли  $\Delta t \rightarrow 0$ , тобто

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \quad (10.29)$$

Отже, **прискорення точки дорівнює векторній похідній по часу від швидкості точки**, тобто це теж вектор, напрямлений по дотичній до годографа вектора швидкості та **розташований у дотичній площині**, оскільки цю площину утворюють дотичні в точках  $M$  і  $M_1$  коли  $M_1 \rightarrow M$ .



## Обчислення прискорення точки із законів руху у векторній та у координатній формах

Якщо закон руху точки заданий у векторній формі  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , або в координатній формі  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ , то за формулами (10.24), (10.4) і (10.5) для вектора, проекцій, величини і напрямних косинусів прискорення, враховуючи, що  $\vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = 0$  маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}_x \vec{i} + \ddot{r}_y \vec{j} + \ddot{r}_z \vec{k} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}, \\ a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}, a &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \\ \cos \alpha_a = \frac{a_x}{a}, \cos \beta_a = \frac{a_y}{a}, \cos \gamma_a &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

## Обчислення прискорення із закону руху в натуральній формі

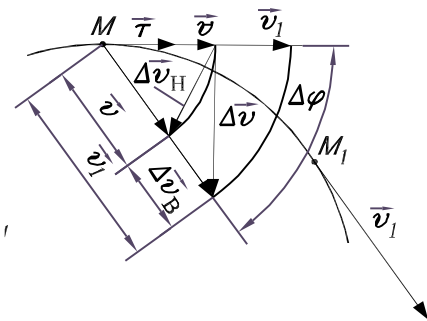


Рисунок 10.12

Нехай задана траєкторія точки та її дугова координата як функція часу  $s = s(t)$ . Зміну швидкості точки  $\Delta \vec{v}$  за нескінченно малий проміжок часу подамо у вигляді геометричної суми двох векторів: зміни швидкості за напрямком  $\Delta \vec{v}_H$  і зміни швидкості за величиною  $\Delta \vec{v}_B$  (Рис. 10.12)

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_B + \Delta \vec{v}_H. \quad (10.31)$$

Оскільки вектор  $\Delta \vec{v}_B$  напрямлений вздовж вектора  $\vec{v}$ , а вектор  $\Delta \vec{v}_H$  напрямлений перпендикулярно до  $\vec{v}$  (при  $t \rightarrow 0$ ), то  $\Delta \vec{v}$  можна представити у вигляді

$$\Delta \vec{v} = \vec{\tau} \cdot \Delta v_B + \vec{n} \cdot \Delta v_H, \quad (10.32)$$

де  $\Delta v_H = v \cdot \Delta \varphi$  як хорда дуги кола радіуса  $v$ , яку можна

ще задати формулою  $\Delta v_i = v \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \Delta s$ . Для прискорення  $\vec{a}$  матимемо

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\tau} \cdot \Delta v_{\hat{A}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \vec{n} \cdot v \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right) \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (10.33)$$

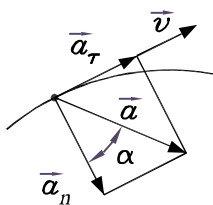
або, враховуючи, що тут  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ,  $v$  постійні величини, запишемо

$$\vec{a} = \vec{\tau} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\hat{A}}}{\Delta t} + \vec{n} \cdot v \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \vec{n} \frac{v^2}{\rho},$$

де  $\rho$  – радіус кривизни траєкторії.

Отже, прискорення  $\vec{a}$  має дві складові. Одна з цих складових характеризує бистроту зміни швидкості за величиною, напрямлена по дотичній до траєкторії точки та її називають **тангенціальним**, або **дотичним**, прискоренням

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \frac{dv}{dt}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (10.34)$$



Друга складова характеризує бистроту зміни швидкості за напрямком, напрямлена по нормалі у бік увігнутості траєкторії та її називають **нормальним** прискоренням (Рис. 10.13)

$$\vec{a}_n = \vec{n} \frac{v^2}{\rho}, \quad \dot{a}_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}. \quad (10.35)$$

**Рисунок 10.13**

Для прискорення та його напрямку маємо

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{|\dot{a}_\tau|}{\dot{a}_n}. \quad (10.36)$$

Щодо тангенціального прискорення  $\vec{a}_\tau$  слід зауважити, що це прискорення може бути напрямленим у бік швидкості або в

протилежний їй бік залежно від того, однакові чи різні в них знаки, бо

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot a_\tau \quad \text{і} \quad \vec{v} = \vec{\tau} \cdot v.$$

За однакових знаків тангенціального прискорення та швидкості точка рухається прискорено, а за різних знаків - уповільнено, що слідує з формули (10.33).

**Задача 10.3.** За умовами задач 10.1 та 10.2 визначити прискорення точки в довільний момент часу та значення прискорення точки при  $t=0,5$  с.

### Розв'язок

Із закону руху точки у векторній і координатній формах

$$\vec{r} = R \cos \pi t^2 \vec{i} + R \sin \pi t^2 \vec{j}, \quad \text{або} \quad x = R \cos \pi t^2, \quad y = R \sin \pi t^2.$$

Користуючись формулами (10.30), отримаємо для прискорення  $\vec{a}$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -2\pi R (\sin \pi t^2 + 2\pi t^2 \cos \pi t^2) \vec{i} + 2\pi R (\cos \pi t^2 - 2\pi t^2 \sin \pi t^2) \vec{j},$$

$$a_x = \ddot{x} = -2\pi R (\sin \pi t^2 + 2\pi t^2 \cos \pi t^2), \quad a_y = \ddot{y} = 2\pi R (\cos \pi t^2 - 2\pi t^2 \sin \pi t^2),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\pi R \sqrt{1 + 4\pi^2 t^4}.$$

При  $t=0,5$  с, одержимо

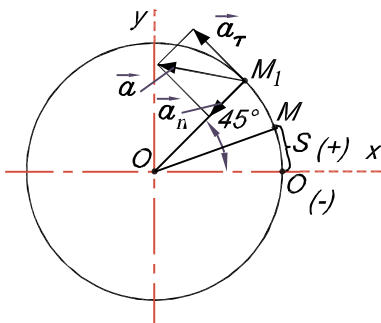


Рисунок 10.14

$$\vec{a} = -\sqrt{2}\pi R \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sqrt{2}\pi R \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \vec{j}$$

$$a_x = -\sqrt{2}\pi R \left(1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a_y = \sqrt{2}\pi R \left(1 - \frac{\pi}{2}\right), \quad a = \pi R \sqrt{4 + \pi^2};$$

$$\cos \alpha_a = -\sqrt{\frac{1 + \pi}{4 + \pi^2}},$$

$$\cos \beta_a = \sqrt{\frac{1 - \pi}{4 + \pi^2}}.$$

У випадку закону руху в натуральній формі маємо  $s = \pi R t^2$  і за формулами (10.34) - (10.36) одержимо

$$\begin{aligned} a_t &= \ddot{S} = 2\pi R, \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = 4\pi^2 R t^2, \\ a &= 2\pi R \sqrt{1 + 4\pi^2 t^4}, \end{aligned}$$

а при  $t=0,5$  с

$$\begin{aligned} a_t &= 2\pi R, \quad a_n = \pi^2 R, \\ a &= \pi R \sqrt{4 + \pi^2}. \end{aligned}$$

Прискорення та його компоненти показані на рис. 10.14.

#### 10.4. Рівномірний та рівнозмінний рухи точки

**Рівномірним називають такий рух точки, в якому точка за однакові проміжки часу проходить однакові відстані на своїй траєкторії.** Оскільки швидкість точки обчислюють за формулою (10.26)

$$v = \frac{ds}{dt},$$

то в рівномірному русі вона є сталою величиною, і коли записати

$$ds = v dt,$$

то при  $v = \text{const}$  матимемо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt, \quad s - s_0 = vt,$$

тобто, закон рівномірного руху точки має вигляд

$$s = s_0 + vt, \quad (10.37)$$

де  $s_0$  – значення дугової координати при  $t = 0$ .

**Рівнозмінним називають такий рух точки, в якому швидкість точки за однакові проміжки часу змінюється на однакові величини.**

Оскільки тангенціальне прискорення точки обчислюють за формулою

$$a_\tau = \frac{dv}{dt},$$

то в рівнозмінному русі це прискорення є сталою величиною, і коли запишемо  $dv = a_\tau dt$ , то при  $a_\tau = \text{const}$  матимемо

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_\tau dt, \quad v - v_0 = a_\tau t.$$

Отже для швидкості точки отримаємо таку формулу

$$v = v_0 + a_\tau t, \quad (10.38)$$

де  $v_0$  – значення швидкості при  $t = 0$ .

Ураховуючи, що  $v = \frac{ds}{dt}$  і  $ds = v dt = (v_0 + a_\tau t) dt$ , одержи-

мо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_\tau t) dt, \quad s - s_0 = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

тобто, закон рівнозмінного руху точки має вигляд:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (10.39).$$

**Задача 10.4.** За заданими рівняннями руху точки в координатній формі  $x = 6t$  см,  $y = (9 - 36t^2)$  см встановити вигляд її траек-

торії і для моменту часу  $t_1 = \frac{2}{3}$  с, знайти положення точки на траєкторії, швидкість, повне, тангенціальне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії.

### Розв'язок

Для встановлення рівняння траєкторії із закону руху виключимо час  $t$  і одержимо

$$y = 9 - x^2,$$

тобто траєкторією точки є парабола (Рис. 10.15).

Обчислимо проекції швидкості та повного прискорення на координатні осі:

$$v_x = \dot{x} = 6, \quad v_y = \dot{y} = -72t, \quad a_x = \ddot{x} = 0,$$

$$a_y = \ddot{y} = -72,$$

а також модулі швидкості та прискорення:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{6^2 + 72^2 t^2} = 6\sqrt{1 + 144t^2},$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 72.$$

Тангенціальне прискорення  $a_\tau$  обчислимо за формулою

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{v} = \frac{72 \cdot 72t}{6\sqrt{1 + 144t^2}} = \frac{864t}{\sqrt{1 + 144t^2}}$$

Нормальне прискорення визначаємо так

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

а радіус кривизни обчислюємо з виразу

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

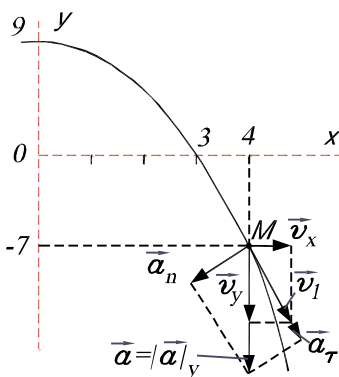


Рисунок 10.15

Для нашого випадку при  $t_1 = \frac{2}{3}$  с точка перебуває в положенні з координатами  $x = 4\text{см}$ ,  $y = -7\text{см}$  (Рис. 10.15) і значення наведених вище величин дорівнюють

$$v_x = 6 \frac{\text{см}}{\text{с}}, v_y = -48 \frac{\text{см}}{\text{с}}, v = 48,4 \frac{\text{см}}{\text{с}},$$

$$a_x = 0, a_y = 72 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, a_\tau = 71,4 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, a_n = 9,28 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \rho = 252,4\text{см}.$$

Усі визначені величини зображені на рис. 10.15.

### Контрольні запитання

1. Що називають законом механічного руху тіла та точки?
2. У яких формах можна подати закон руху точки?
3. Який є взаємозв'язок між різними формами закону руху точки?
4. Що називають годографом вектора?
5. Визначення швидкості точки та способи її обчислення, якщо закон руху точки заданий у векторній, координатній та натуральній формах.
6. Як визначити кривизну траєкторії точки?
7. Які осі утворюють натуральну систему координат і як направлені одиничні орти цих осей?
8. Визначення прискорення точки та способи його обчислення, якщо закон руху точки заданий у векторній, координатній та натуральній формах.
9. Записати закон рівномірного та рівнозмінного руху точки.
10. Як отримати рівняння траєкторії руху точки?

## **Глава 11. Основні види руху твердого тіла**

### **11.1. Число степенів вільності і закон руху твердого тіла.**

**Числом степенів вільності твердого тіла (або будь-якої механічної системи) називають число незалежних параметрів, що однозначно визначають положення тіла відносно даної системи відліку.**

Отже, коли ці параметри задані, як функції часу, то можна вважати, що закон руху тіла відомий і складається із стількох рівнянь руху, скільки степенів вільності у тіла. Наприклад: вільна точка має три степені вільності, бо її положення і рух визначаються трьома незалежними координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; точка на поверхні має вже дві степені вільності, бо її координати повинні задовольняти рівняння поверхні  $i$ , отже, тільки дві з них можуть бути незалежними. Вільне тіло в просторі має шість степенів вільності, бо його положення в декартовій системі визначається положенням будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій. Проте дев'ять координат трьох точок повинні задовольняти три рівняння, які вимагають незмінності відстаней між точками твердого тіла. Отже тільки шість координат є незалежними.

Існує два основних види руху твердого тіла, з комбінації яких можна одержати інші більш складні його рухи. Такими рухами є поступальний рух і обертальний рух навколо нерухомої осі.

### **11.2. Поступальний рух твердого тіла**

**Поступальним рухом твердого тіла називають такий його рух, в якому будь-яка пряма, проведена в тілі, зостається весь час паралельною самій собі.**

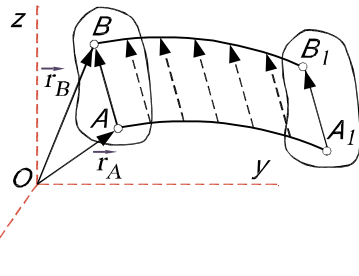


Оскільки в цьому разі положення тіла визначається однозначно положенням якогось відрізка  $AB$ , а положення відрізка, що увесь час паралельний сам собі, визначається положенням будь-якої його точки, наприклад  $A$ , то тіло в поступальному русі має три степені вільності та його законом руху буде закон руху однієї точки тіла

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), z_A = z_A(t). \quad (11.1)$$

Властивості поступального руху тіла характеризує повністю **теорема: при поступальному русі твердого тіла всі точки описують однакові траєкторії** (Рис. 11.2) та в кожний момент часу мають однакові швидкості та прискорення.

**Доведення.** Якщо на твердому тілі (Рис. 11.2) взяти дві точки  $A$  і  $B$ , то



**Рисунок 11.2**

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}, \quad (11.2)$$

де  $\overrightarrow{AB}$  – сталий за модулем і за напрямком вектор, а тому траєкторія точки  $B$  зсунута порівняно з траєкторією точки  $A$  на сталий вектор  $\overrightarrow{AB}$  і однакова з нею. Візьмемо похідну по часу з рівності (11.2)

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + 0, \quad \text{або} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad (11.3)$$

бо похідна сталого вектора  $\overrightarrow{AB}$  дорівнює нулю.

Після диференціювання рівності (11.3) одержимо

$$\dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A \quad \text{або} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A, \quad (11.4)$$

що й треба було довести.

Отже, для вивчення поступального руху твердого тіла достатньо скористатися кінематикою однієї його точки.

Зауваження:

1) тільки при поступальному русі кутова швидкість твердого тіла дорівнює 0,  $\omega\theta$ ;

2) тільки при поступальному русі твердого тіла мають сенс наступні вираження : швидкість тіла, прискорення тіла, траєкторія тіла.

### 11.3. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

**Обертанням навколо нерухомої осі називають такий рух тіла, в якому дві його точки залишаються весь час нерухомими.**

У цьому русі маємо цілу вісь нерухомих точок, яку називають віссю обертання, а всі інші точки описують кола, розташовані в площинах, перпендикулярних до осі обертання, з центрами на цій осі.

#### Закон обертання тіла

Якщо проведемо через вісь обертання  $Oz$  нерухому площину  $\Pi_0$  і площину  $\Pi_1$ , жорстко зв'язану з тілом, то положення тіла буде визначеним положенням площини  $\Pi_1$ .

Положення цієї площини в свою чергу визначається кутом  $\varphi$

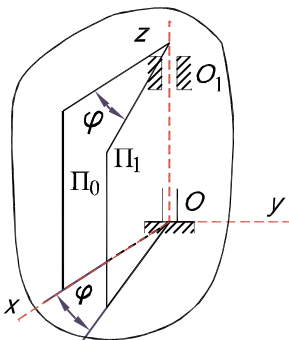


Рисунок 11.3

повороту відносно нерухомої площини  $\Pi_0$  (Рис. 11.3). Отже, положення тіла в обертальному русі визначається одним параметром  $\varphi$ , тобто тіло має одну степінь вільності. Кут  $\varphi$  називають кутом повороту тіла. Якщо цей кут заданий як функція часу, то закон обертання тіла має вигляд

$$\varphi = \varphi(t). \quad (11.5)$$

## Кутова швидкість та кутове прискорення

Загальними характеристиками обертального руху тіла є кутова швидкість та кутове прискорення.

**Кутовою швидкістю  $\omega$  називають бистроту зміни кута повороту тіла з часом, тобто**

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (11.6)$$

**Кутова швидкість обертального руху тіла дорівнює похідній по часу від кута повороту тіла та є величиною алгебраїчною.**

Якщо  $\omega > 0$ , то тіло обертається у бік зростання кута  $\varphi$  ( $\Delta\varphi > 0$ ), а коли  $\omega < 0$  - у бік зменшення кута  $\varphi$  ( $\Delta\varphi < 0$ ).

Коли кут вимірюють у радіанах, то розмірність кутової швидкості  $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$  або просто  $\frac{1}{\text{ñ}} = \text{ñ}^{-1}$ . У техніці кутову швидкість називають частотою обертання та виражають в обертах за хвилину  $n$ ,  $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$ . Оскільки один оберт це  $2\pi$  радіан, тоді  $n$  обертів за

хвилину буде дорівнювати  $2\pi n$  радіан за хвилину або  $\frac{2\pi n}{60}$  радіан за секунду. Ураховуючи це, маємо таку залежність між  $\omega$  і  $n$ :

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad \frac{1}{\text{ñ}}, \quad (11.7)$$

де  $n$  – в обертах за хвилину.

**Кутовим прискоренням  $\varepsilon$  в обертальному русі називають бистроту зміни кутової швидкості тіла з часом**

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}, \quad \text{або} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (11.8)$$

**Кутове прискорення дорівнює похідній по часу від кутової швидкості або другій похідній по часу від кута повороту**

**тіла.**

Обертання тіла буде прискореним: а) при  $\omega > 0$ , коли  $\Delta\omega > 0$  і, отже,  $\varepsilon > 0$ , б) при  $\omega < 0$ , коли  $\Delta\omega < 0$  і, отже,  $\varepsilon < 0$ .

Обертання тіла буде уповільненим: а) при  $\omega > 0$  коли  $\Delta\omega < 0$  і, отже,  $\varepsilon < 0$ , б) при  $\omega < 0$ , коли  $\Delta\omega > 0$  і, отже,  $\varepsilon > 0$ .

Таким чином, рух тіла буде прискореним, якщо кутова швидкість і кутове прискорення мають однакові знаки, і уповільненим, якщо знаки кутової швидкості та кутового прискорення різні.

### **Рівномірне та рівнозмінне обертання тіла**

**Рівномірним** називають таке обертання тіла, коли за **рівні проміжки часу кут повороту тіла змінюється на однакові величини**, а це означає, що кутова швидкість  $\omega$  обертання є сталою величиною та згідно з (11.6) отримаємо

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad d\varphi = \omega dt.$$

Звідси після інтегрування при  $\omega = \text{const}$  одержимо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega t.$$

Отже, закон рівномірного обертання при заданій кутовій швидкості буде мати вигляд

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (11.9)$$

де  $\varphi_0$  - значення кута повороту  $\varphi$  при  $t = 0$ .

**Рівнозмінним** називають таке обертання тіла, коли за **однакові проміжки часу кутова швидкість змінюється на однакові величини**, а це означає, що кутове прискорення  $\varepsilon$  обертання є сталою величиною.

З формули (11.8) маємо

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \quad \text{і} \quad d\omega = \varepsilon dt.$$

Після інтегрування цих виразів при  $\varepsilon = \text{const}$  одержимо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt, \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon t.$$

Отже закон зміни кутової швидкості рівнозмінного руху має вигляд

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (11.10)$$

де  $\omega_0$  – значення кутової швидкості при  $t = 0$ .

Ураховуючи, що  $d\varphi = \omega dt = (\omega_0 + \varepsilon t)dt$ , і інтегруючи цей вираз при  $\varepsilon = \text{const}$ , отримаємо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

звідси закон рівнозмінного обертання тіла

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (11.11)$$

Слід звернути увагу, що формули, які характеризують рівномірне й рівнозмінне обертання тіла (11.9), (11.10), (11.11) цілком аналогічні до формул (10.37), (10.38), (10.39), що характеризують рівномірний та рівнозмінний рухи точки.

### Кутова швидкість і кутове прискорення як вектори

Щоб охарактеризувати обертальний рух тіла навколо даної

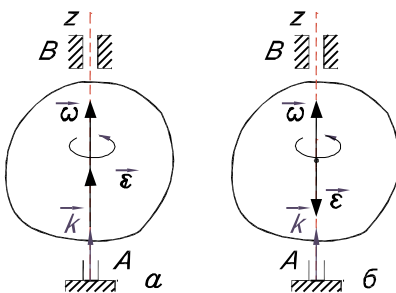


Рисунок 11.4

нерухомої осі, кутову швидкість обертання вважають вектором, напрямленим уздовж осі обертання в той бік, звідки обертання тіла видно проти ходу годинникової стрілки і якщо вісь обертання  $Oz$  (Рис. 11.4) має одиничний орт  $\vec{k}$ , то вектор кутової швидкості має вигляд

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}, \quad (11.12)$$

де  $\omega$  - алгебраїчне значення кутової швидкості.

Вектор  $\vec{\omega}$  напрямлений вздовж  $\vec{k}$  при  $\omega > 0$  та в протилежний бік при  $\omega < 0$ , якщо вважати, що кут обертання  $\varphi$  відкладаємо проти годинникової стрілки, коли дивитися з вершини вектора  $\vec{k}$  (Рис. 11.4). Бистрота зміни вектора  $\vec{\omega}$  кутової швидкості з часом, як його векторна похідна, дорівнює

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{k} = \varepsilon \cdot \vec{k},$$

тобто це вектор, що за величиною дорівнює **кутовому прискоренню**. Отже кутове прискорення теж є вектором

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}, \quad (11.13)$$

напрямленим уздовж осі обертання тіла. За формулами (11.12) і (11.13) видно, що вектори кутової швидкості та кутового прискорення в прискореному обертанні напрямлені в один бік, а в уповільненому обертанні напрямлені в протилежні боки вздовж осі обертання.

### Швидкості та прискорення точок тіла в обертальному русі

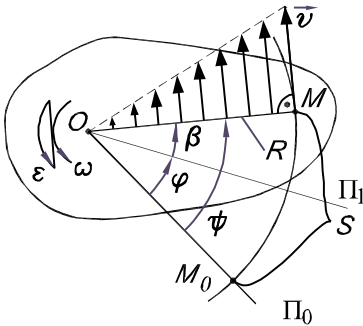


Рисунок 11.5

Розглянемо обертальний рух тіла за законом  $\varphi = \varphi(t)$  і зобразимо тіло так, щоб вісь обертання була перпендикулярною до площини рисунка (Рис. 11.5) та проходила через точку  $O$ . Будь-яка точка  $M$  тіла описує коло радіуса  $R = OM$  навколо точки  $O$ . Прямі  $OP_0$  і  $OP_1$  – сліди перетину площин  $\Pi_0$  і  $\Pi_1$  з площиною руху точки.

Оскільки траєкторія точки відома, то для дугової координати точки  $M$  маємо

$$s = \psi R = (\varphi + \beta)R, \quad (11.14)$$

де кут  $\beta$  – стала величина, що утворена прямими  $OM$  і  $OP_1$ ,

жорстко зв'язаними з тілом.

Швидкість точки визначають за формулою

$$v = \dot{s} = \dot{\phi}R = \omega R. \quad (11.15)$$

Отже, швидкості точок тіла в обертальному русі пропорційні відстаням до точок від осі обертання і напрямлені по дотичній до траєкторій, тобто перпендикулярно до радіусів обертання (Рис. 11.5).

Прискорення точки визначають за його складовими: **тангенціальним та нормальним прискореннями**

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (11.16)$$

які обчислюють за відомими формулами

$$a_\tau = \dot{v} = \dot{s} = \ddot{\phi}R = \varepsilon R, \quad (11.17)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = \omega^2 R = \dot{\phi}^2 R.$$

Отже

$$a_\tau = R\varepsilon, \quad a_n = R\omega^2, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (11.18)$$

Тангенціальне, нормальне й повне прискорення, як і швидкості точок, розподілені за лінійним законом, тобто пропорційні відстаням до точок від осі обертання. Напрямок тангенціального прискорення зумовлений напрямком кутового прискорення та

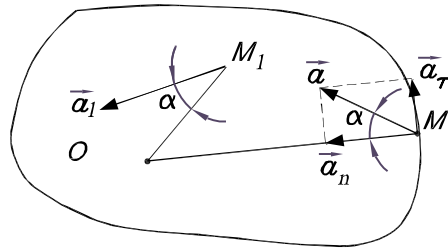


Рисунок 11.6

в прискореному русі  $\vec{a}_\tau$  напрямлене у той самий бік, що й швидкість точки, а в уповільненому русі – у протилежний бік. Нормальне прискорення завжди напрямлене до осі обертання. Напрямок повного прискорення визначають за кутом  $\alpha$ , для якого (Рис. 11.6)

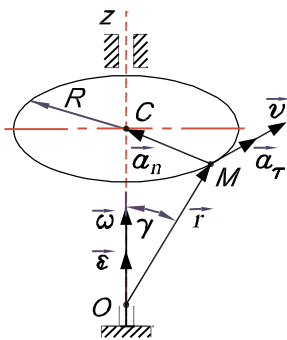


Рисунок 11.7

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_{\tau}|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (11.19)$$

і який для всіх точок тіла однаковий.

### Векторні формули для швидкостей та прискорень точок тіла

Розглянемо рух якоїсь точки  $M$  тіла в обертальному русі та зобразимо на рис. 11.7 усі вектори обертального руху:  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}_{\tau}$ ,  $\vec{a}_n$  і  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки  $M$ , проведений з будь-якого центра  $O$  на

осі обертання. Розглянемо векторний добуток векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$ , тобто  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ .

Цей вектор за правилами векторного добутку напрямлений перпендикулярно до площини трикутника  $OCM$  у бік швидкості  $\vec{v}$  точки, а за модулем дорівнює

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \gamma = \omega R = v,$$

а тому отримуємо таку векторну рівність

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (11.20)$$

тобто, **швидкість точки  $M$  дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор точки відносно будь-якого центра на осі обертання. Формула (11.20) носить ім'я Ейлера.**

Аналогічно до цього, розглядаючи векторний добуток кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  на радіус-вектор  $\vec{r}$  точки  $M$ ,

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r},$$

приходимо до висновку, що цей добуток, як вектор, сумісний за напрямом з тангенціальним прискоренням  $\vec{a}_{\tau}$  і за модулем дорівнює йому

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin \gamma = R \varepsilon = a_{\tau},$$



а тому маємо другу векторну рівність

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (11.21)$$

тобто, **тангенціальне прискорення точки М дорівнює векторному добутку кутового прискорення тіла на радіус-вектор  $\vec{r}$  точки.**

Векторний добуток кутової швидкості  $\vec{\omega}$  та швидкості  $\vec{v}$  точки  $M$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}$$

за напрямком сумісний з нормальним прискоренням  $\vec{a}_n$  та дорівнює йому за модулем

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega \cdot v \cdot \sin 90^\circ = \omega \omega r = \omega^2 r,$$

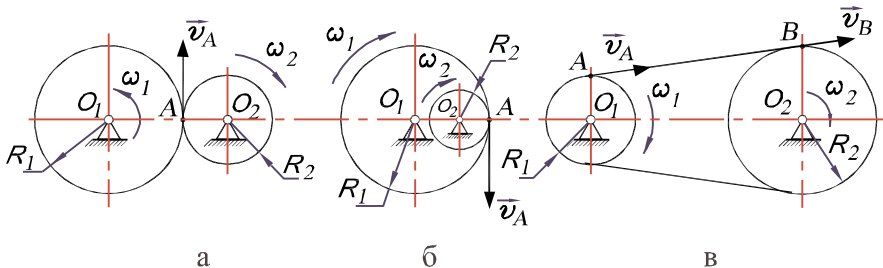
а тому маємо

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (11.22)$$

#### 11.4. Передавальні механізми

**Систему твердих тіл, призначену для передачі руху від одного чи декількох твердих тіл до інших твердих тіл називають механізмом. Тверді тіла, які входять до складу механізму, називають ланками. Передавальні механізми, які призначені для передавання обертального руху від одного тіла (вала) до іншого, називають механізмами передач. Ланку, з якої передають обертання, називають ведучою. Ланка, на яку передають обертання, називають веденою.**

Обертальний рух можна передати за допомогою фрикційної, зубчастої або пасової передач (Рис. 11.8). У фрикційній передачі обертання передається за допомогою сил тертя між поверхнями ланок (котків), що дотикаються (Рис. 11.8, а); у зубчастій передачі – унаслідок зачеплення зубців коліс (Рис. 11.8, б); у пасовій – за допомогою сил тертя між нескінченним пасом і шківом (Рис. 11.8, в).



**Рисунок 11.8**

За відсутності проковзування між ланками, які дотикаються чи зачіпляються, швидкість в точці  $A$  дотику для обох ланок однакова. Швидкість точок на ободі шківів пасової передачі за відсутності ковзання паса по шківях також однакові між собою ( $v_A = v_B$ ):

$$v_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

звідси

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким чином, для цих видів передач кутові швидкості обернено пропорційні до радіусів коліс.

**Відношення кутових швидкостей ланок називають передавальним відношенням**

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}; \quad u_{12} = \frac{1}{u_{21}}.$$

**Відношення кутової швидкості ведучої ланки до кутової швидкості веденої ланки називають передавальним числом**

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \text{або} \quad u = \frac{R_2}{R_1}. \quad (11.24)$$

Передавальне відношення є тільки кінематичною характеристикою передачі і його завжди записують з нижніми індексами, порядок яких відповідає відношенню кутових швидкостей: перший індекс – це номер ланки, кутова швидкість якої записана у

чисельнику, другий індекс – номер ланки у знаменнику. Передавальне число є динамічною характеристикою передачі, оскільки вказує на напрям передачі енергії – від тягової ланки до тягнутої.

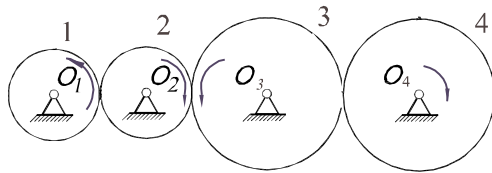
У разі зовнішнього дотикання котків фрикційної передачі чи зачеплення коліс зубчастої передачі (Рис. 11.8, а) передавальне відношення буде зі знаком мінус, оскільки кутові швидкості ланок направлені у протилежні боки. У випадку внутрішнього дотикання чи зачеплення ланок (Рис. 11.8, б) передавальне відношення матиме знак плюс, тому що кутові швидкості ланок направлені в один бік.

Оскільки число зубців колеса передачі пропорційне довжині певного кола на колесі, а, значить, і радіусу цього кола, то передавальне відношення та передавальне число можна визначити за співвідношенням чисел зубців

$$u_{12} = u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (11.25)$$

Багатоступеневі зубчасті передачі виконані так, що передавання обертового руху від ведучого колеса до веденого відбувається за допомогою декількох проміжних коліс, які обертаються відносно нерухомих осей. Такі передачі називаються **рядовими**.

На рис. 11.9 обертання передається від колеса 1 до колеса 4 через колеса 2 і 3. Передавальне відношення такої передачі



**Рисунок 11.9**

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34}.$$

Отже передавальне відношення багатоступеневої передачі дорівнює добутку передавальних відношень окремих одноступневих передач.

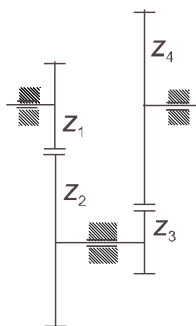


Рисунок 11.10

**Задача 11.1.** Визначити передавальне відношення зубчастої передачі (Рис. 11.10), коли числа зубців коліс дорівнюють  $z_1 = 20, z_2 = 40, z_3 = 15, z_4 = 45$ .

### Розв'язок

Оскільки передавальне відношення багатоступеневої передачі дорівнює добутку передавальних відношень окремих одноступневих передач, то запишемо

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{34} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{40}{20} \cdot \left(-\frac{45}{15}\right) = 6.$$

### Контрольні запитання

1. Що називають числом степенів вільності твердого тіла?
2. Назвіть два основні види руху твердого тіла.
3. До чого можна звести кінематику поступального руху твердого тіла?
4. Що є траєкторією точки твердого тіла, яке обертається?
5. Дайте означення кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла.
6. Запишіть закон рівномірного та рівнозмінного обертання твердого тіла.
7. Як напрямлені вектори кутової швидкості і кутового прискорення при обертання твердого тіла?

8. Запишіть вирази для швидкості та прискорення точки твердого тіла, яке обертається рівноприскорено або рівносповільнено.

9. Запишіть та поясніть формулу Ейлера.

10. Дайте означення механізму та ланки.

11. Назвіть механізми для передачі обертального руху.

12. Що називають передавальним відношенням та передавальним числом?

13. Запишіть передавальне відношення для зубчастої передачі, яка складається з двох зубчастих коліс з внутрішнім зачепленням зубців.

14. Запишіть передавальне відношення для механізмів з рядним та ступеневим зачепленням зубців.

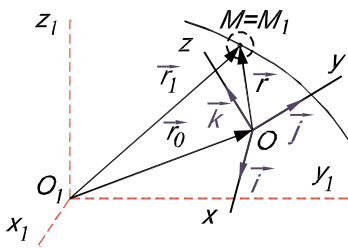
## Глава 12. Кінематика складного руху точки

Складний рух точки, або взагалі будь-якого тіла, відбувається тоді, коли точка чи тіло рухається в системі координат  $Oxyz$ , яка здійснює рух в нерухомій системі координат  $O_1x_1y_1z_1$ . На практиці рухома система координат пов'язана з матеріальним тілом, що здійснює той чи інший рух, а по цьому тілу рухається точка, яка таким чином перебуває в складному русі, бо крім руху по тілу рухається ще й разом з тілом.

### 12.1. Означення параметрів складного руху

Рух точки  $M$  відносно нерухомої системи координат називають **абсолютним рухом** (Рис. 12.1); рух точки  $M$  відносно рухомої системи координат  $Oxyz$  називають **відносним рухом**; рух рухомої системи координат  $Oxyz$  відносно нерухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$  називають **переносним рухом**.

Швидкості та прискорення точки  $M$  в абсолютному русі й у відносному русі називають відповідно **абсолютними і відносними** швидкостями та прискореннями, а швидкість та прискорення тієї



точки  $M_1$  рухомої системи координат  $Oxyz$ , з якою в даний момент часу збігається точка  $M$ , називають **переносними** швидкістю та прискоренням точки  $M$ .

Рисунок 12.1

Відносну швидкість та відносне прискорення можна уявляти як швидкість та прискорення точки  $M$ , які обчислює спостерігач у рухомій системі координат, не звертаючи уваги на рух самої

системи. **Переносна швидкість і переносне прискорення** – це швидкість та прискорення точки  $M$ , уявно жорстко зв'язаної з точкою  $M_1$  рухомої системи координат, які обчислює спостерігач у нерухомій системі координат.

## 12.2. Обчислення швидкостей і прискорень у складному русі

Якщо подати радіус-вектор  $\vec{r}$  точки  $M$  в рухомій системі координат у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (12.1)$$

і врахувати, що в будь-який момент часу має місце рівність

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}, \quad (12.2)$$

то для вектора  $\vec{r}_1$ , проведеного з початку нерухомої системи координат у точку  $M$ , матимемо

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (12.3)$$

Для обчислення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки  $M$  треба диференціювати вектор  $\vec{r}_1$  за умови, що в формулі (12.3) для нерухомого спостерігача, який перебуває в точці  $O_1$ , усі величини змінні, а тому

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_0 + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (12.4)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_0 + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + 2\left(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right) \quad (12.5)$$

Відносну швидкість  $\vec{v}_r$  та відносне прискорення  $\vec{a}_r$  обчислимо, як спостерігач у рухомій системі координат, диференціюванням вектора  $\vec{r}$  за умови, що в формулі (12.1) координатні орти незмінні. Отримаємо

$$\vec{v}_r = \left[\dot{\vec{r}}\right]_0 = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (12.6)$$

$$\vec{a}_r = \left[\ddot{\vec{r}}\right]_0 = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \quad (12.7)$$

де нижній індекс 0 означає, що диференціювання здійснене

при сталих координатних ортах  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

Переносну швидкість  $\vec{v}_e$  та переносне прискорення  $\vec{a}_e$ , як швидкість і прискорення точки  $M_1$  рухомої системи, обчислимо диференціюванням вектора  $\vec{r}_1$  як нерухомий спостерігач в точці  $O_1$ , але за умови, що в формулі (12.3)  $x$ ,  $y$ ,  $z$  є сталими величинами як координати точки, які жорстко зв'язані з рухомою системою координат  $Oxyz$ . Отже,

$$\vec{v}_e = \left[ \dot{\vec{r}}_1 \right]_k = \dot{r}_0 + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}, \quad (12.8)$$

$$\vec{a}_e = \left[ \ddot{\vec{r}}_1 \right]_k = \ddot{r}_0 + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}}, \quad (12.9)$$

де нижній індекс  $k$  означає, що диференціювання здійснене при сталих координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

### 12.3. Теорема про додавання швидкостей і прискорень

Порівнюючи рівності (12.4), (12.6) і (12.8), сформулюємо теорему про додавання швидкостей у складному русі точки: **абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі переносної і відносної швидкостей:**

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (12.10)$$

Аналогічно, порівнюючи рівності (12.5), (12.7) і (12.9), сформулюємо теорему про додавання прискорень у складному русі точки: **абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного, відносного та прискорення Кориоліса:**

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad (12.11)$$

де  $\vec{a}_c = 2\left( \dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}} \right)$  – прискорення Кориоліса.

Розглянемо поступальний та обертальний випадки руху рухомої системи координат як руху твердого тіла.

Якщо переносний рух (рух рухомої системи координат) пос-



тупальний, то одиничні орти  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  будуть незмінними і за модулем й за напрямком, а тому  $\dot{\vec{i}} = 0$ ,  $\dot{\vec{j}} = 0$ ,  $\dot{\vec{k}} = 0$  і прискорення Кориоліса дорівнює нулю ( $\vec{a}_c = 0$ ). У цьому випадку теорему про додавання прискорень сформулюємо так: **абсолютне прискорення при поступальному переносному русі дорівнює геометричній сумі переносного і відносного прискорень**

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r. \quad (12.12)$$

Якщо переносний рух обертальний, то похідні по часу від ортів  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , будучи швидкостями кінців цих векторів в оберտальному русі з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_e$ , за формулою (11.20) набудуть вигляду (**формули Пуассона**):

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_e \times \vec{k},$$

а тому для прискорення Кориоліса одержимо

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \quad (12.13)$$

де враховано (12.6).

Отже, прискорення Кориоліса виникає тоді, коли переносний рух є обертальним з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_e$ .

Якщо провести аналіз походження прискорення Кориоліса, то можна дійти до висновку: **прискорення Кориоліса - це геометрична сума бистроти додаткової зміни відносної швидкості за рахунок переносного обертання і бистроти додаткової зміни переносної швидкості за рахунок відносного переміщення точки у системі координат, яка обертається.** Ці додаткові зміни відносної і переносної швидкостей не враховуються відносним і переносним прискоренням у тому означенні, яке було їм надане. Для більш детального пояснення похо-

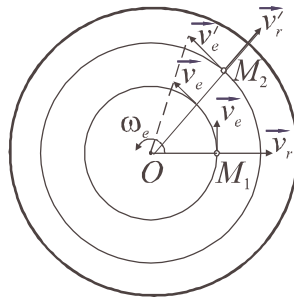


Рисунок 12.2

дження прискорення Кориоліса розглянемо приклад. Тіло рухається рівномірно вздовж радіуса диска, який рівномірно обертається навколо осі, перпендикулярної до площини рисунка (Рис. 12.2). Відносною швидкістю тіла є швидкість його руху вздовж радіуса, а переносною – швидкість тієї точки диска, в якій у даний момент часу перебуває тіло.

Нехай у момент часу  $t$  тіло перебуває в положенні  $M_1$ , а в момент часу  $t + \Delta t$  - у положенні  $M_2$ . Оскільки відносний рух тіла є рівномірним і прямолінійним, то відносне прискорення  $\vec{a}_r = 0$ .

Проте за час  $\Delta t$  відносна швидкість тіла зміниться за напрямом від  $\vec{v}_r$  до  $\vec{v}'_r$  унаслідок обертання диска. За той самий проміжок часу  $\Delta t$  зміниться і модуль переносної швидкості від  $v_e = \omega_e \cdot OM_1$  до  $v'_e = \omega_e \cdot OM_2$ , тому що тіло перемістилося з положення  $M_1$  у положення  $M_2$ . Такі зміни швидкостей  $\vec{v}_r$  і  $\vec{v}_e$  викликають появу **прискорення Кориоліса**.

Модуль прискорення Кориоліса обчислюють як модуль векторного добутку (12.13)

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin \angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r). \quad (12.14)$$

**Прискорення Кориоліса дорівнює нулю у трьох випадках:**

1) коли переносний рух є поступальним або в момент перетворення в нуль кутової швидкості не поступального переносного руху ( $\vec{\omega}_e = 0$ );

2) коли відсутній відносний рух точки або у момент перетворення в нуль відносної швидкості рухомої точки ( $\vec{v}_r = 0$ );

3) коли відносна швидкість точки є паралельною до осі переносного обертання ( $\sin \angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$ ,  $\angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$  або  $\angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \pi$ ). Прикладом такого випадку є рух точки вздовж твірної циліндра, який обертається навколо своєї осі).

Напрямок прискорення Кориоліса визначають за правилом век-

торного добутку або за правилом Жуковського: для визначення напряму прискорення  $\vec{a}_c$  потрібно спроектувати відносну швидкість точки на площину, перпендикулярну до осі переносного обертання, і повернути отриману проекцію на цій площині у бік переносного обертання на кут  $90^\circ$  (Рис. 12.3).

**Задача 12.1.** Обчислити абсолютні швидкість  $\vec{v}$  і прискорення  $\vec{a}$  точки  $M$  при  $t = t_1 = \frac{1}{6}c$ . Точка  $M$  рухається в площині квадрата  $D$  за законом  $OM = s_r = 150\pi t^2 \text{ см}$  по дузі кола, радіус якого дорівнює стороні квадрата  $R = 25 \text{ см}$ . Квадрат обертається навколо точки  $O_1$  (Рис. 12.4) за законом  $\varphi_e = (0,75t + 1,5t^2) \text{ рад}$ .

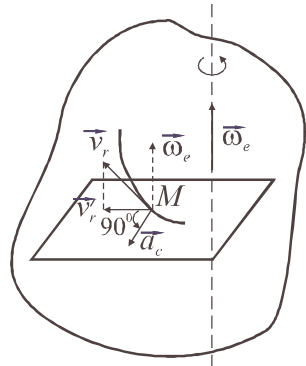


Рисунок 12.3

### Розв'язок

У даному складному русі точки  $M$  відносний рух – це рух точки по дузі  $OO_1$  на квадраті  $D$ ; переносний рух – це обертальний рух квадрата  $D$  навколо точки  $O_1$ . Кутова швидкість і кутове прискорення цього руху дорівнюють

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = (0,75 + 3t) \frac{1}{c},$$

$$\varepsilon_e = \ddot{\varphi}_e = 3 \frac{1}{c^2}.$$

Положення точки  $M$  при  $t = t_1 = \frac{1}{6}c$  визначається координатами

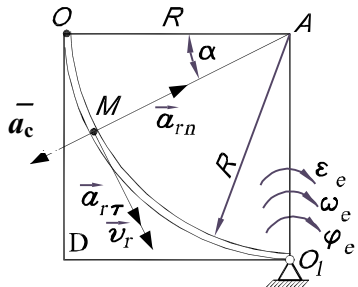


Рисунок 12.4

тою  $s_r$  або кутом  $\alpha$

$$\alpha = \frac{s_r}{R} = \frac{150\pi}{36 \cdot 25} = \frac{\pi}{6} \text{ рад} = 30^\circ.$$

Для обчислення параметрів відносного руху точки, як спостерігач на квадраті, не будемо звертати увагу на обертання квадрата, вивчаючи рух точки по дузі кола  $OO_1$  (Рис. 12.4). Обчислюємо відносні швидкість й прискорення точки  $M$

$$v_r = \dot{s}_r = 300\pi t \frac{cM}{c}, \quad \vec{v}_r \perp \overline{AM},$$

$$a_{r\tau} = \dot{v}_r = 300\pi \frac{cM}{c^2}, \quad \vec{a}_{r\tau} \parallel \vec{v}_r \text{ (рух прискорений)}$$

$$a_{rn} = v_r^2 / R = 3600\pi^2 t^2 \frac{cM}{c^2}, \quad \vec{a}_{rn} \parallel \overline{MA}.$$

При  $t = t_1 = \frac{1}{6}c$  маємо

$$v_r = 157 \frac{cM}{c}, \quad a_{r\tau} = 942 \frac{cM}{c^2}, \quad a_{rn} = 942 \frac{cM}{c^2}.$$

Для обчислення переносних швидкості та прискорення точки уявно з'єднаємо точку  $M$  з квадратом і, як нерухомий спостерігач, вивчаємо її рух разом з квадратом (Рис. 12.5), який обертається навколо точки  $O_1$ . Одержимо

$$v_e = O_1M \cdot \omega_e = O_1M(0,75 + 3t), \quad \frac{cM}{c},$$

$$\vec{v}_e \perp O_1M,$$

$$a_{e\tau} = O_1M \cdot \varepsilon_e = O_1M \cdot 3 \frac{cM}{c^2}, \quad \vec{a}_{e\tau} \parallel \vec{v}_e$$

(рух прискорений),

$$a_{en} = O_1M \cdot \omega_e^2 = O_1M(0,75 + 3t)^2, \quad \frac{cM}{c^2}, \quad \vec{a}_{en} \parallel \overline{MO_1},$$

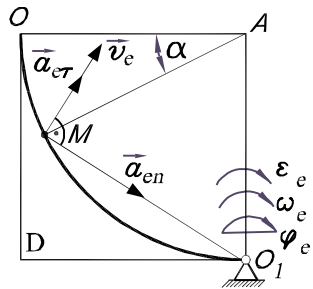


Рисунок 12.5

коли  $t = t_1 = \frac{1}{6}c$ :

$$v_e = 31,25 \frac{cM}{c}, \quad a_{e\tau} = 75 \frac{cM}{c^2}, \quad a_{en} = 39,1 \frac{cM}{c^2}.$$

Оскільки переносний рух є обертальним, то крім відносного і переносного прискорень слід обчислити і прискорення Кориоліса

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \quad a_c = 2\omega_e \cdot v_r \sin \angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r).$$

Вектор переносної кутової швидкості  $\vec{\omega}_e$  (кутової швидкості обертання квадрата  $D$ ), напрямлений перпендикулярно до площини рис. 12.4 від нас. Отже, за правилом векторного добутку вектор  $\vec{a}_c$  напрямлений перпендикулярно до площини векторів  $\vec{v}_r$  і  $\vec{\omega}_e$  у той бік, звідки поворот вектора  $\vec{\omega}_e$  до вектора  $\vec{v}_r$  на кут менший ніж  $180^\circ$  видно проти ходу годинникової стрілки. Величина прискорення Кориоліса

при  $t = t_1 = \frac{1}{6}c$  дорівнює

$$a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r = 392,5 \frac{cM}{c^2}.$$

Зобразимо всі параметри цього складного руху на рис. 12.4 і обчислимо абсолютні швидкість і прискорення способом проектування на координатні осі  $Oxy$  (Рис. 12.6):

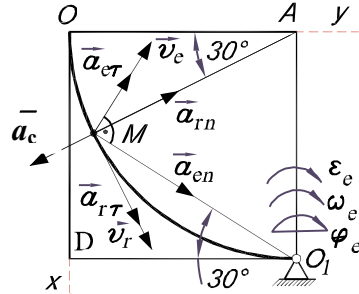


Рисунок 12.6

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e,$$

$$v_x = v_{rx} + v_{ex} = v_r \cos 30^\circ - v_e \cos 30^\circ = 108 \frac{cM}{c},$$

$$v_y = v_{ry} + v_{ey} = v_r \cos 60^\circ - v_e \cos 60^\circ = 94 \frac{cM}{c},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 143,1 \frac{cm}{c},$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{e\tau} + \vec{a}_{en} + \vec{a}_c,$$

звідси

$$a_x = a_{r\tau} \cos 30^\circ - a_{rn} \cos 60^\circ - a_{e\tau} \cos 30^\circ + a_{en} \cos 60^\circ + a_c \cos 60^\circ;$$

$$a_y = a_{r\tau} \cos 60^\circ - a_{rn} \cos 30^\circ - a_{e\tau} \cos 60^\circ + a_{en} \cos 30^\circ - a_c \cos 30^\circ,$$

$$a_x = 441 \frac{cm}{c^2}; \quad a_y = 1084 \frac{cm}{c^2}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1128 \frac{cm}{c^2}.$$

Побудувавши у певному масштабі  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $a_x$ ,  $a_y$ , можна одержати напрямок абсолютної швидкості і напрямок абсолютного прискорення.

### Контрольні запитання

1. Який рух точки називають абсолютним, відносним та переносним?
2. Сформулюйте теореми про додавання швидкостей та прискорень точки в абсолютному русі.
3. Назвіть причини появи прискорення Коріоліса.
4. Запишіть формулу для визначення прискорення Коріоліса.
5. Як визначити напрям прискорення Коріоліса?
6. У яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?

## Глава 13. Плоскопаралельний (плоский) рух твердого тіла

Раніше були розглянуті основні рухи твердого тіла – поступальний та обертальний. Основними, а також і найпростішими, рухами їх називають тому, що всі інші рухи твердого тіла можуть бути складені з цих двох рухів. Перейдемо до вивчення одного з таких складних рухів - плоскопаралельного.

**Плоскопаралельним або плоским рухом твердого тіла називають такий його рух, коли всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині.**

Плоский рух є досить розповсюдженим у техніці, бо приблизно 98% всіх механізмів є плоскими і багато з них мають ланки, які рухаються плоскопаралельно. Таким, наприклад, є рух шатуна  $AB$  у кривошипно-повзунному механізмі (Рис. 13.1).

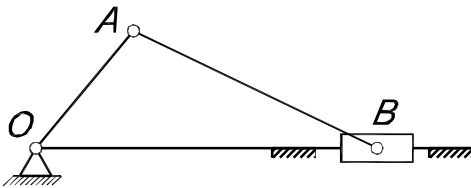


Рисунок 13.1

### 13.1. Плоский рух тіла та рух плоскої фігури. Рівняння руху плоскої фігури

Розглянемо тіло, яке рухається паралельно нерухомій площині  $H$  (Рис. 13.2). Розглянемо також площину  $Q$ , паралельну площині  $H$ , та переріз  $S$  тіла, розміщений у площині  $Q$ . Точки тіла, що лежать на прямій  $A_1A_2$ , перпендикулярній до площин  $H$  і  $Q$ , рухаються так само, як точка  $A$ , яка розміщена в перерізі  $S$ . Якщо взяти інші точки тіла, то кожна з них рухається так само, як відповідна точка в перерізі  $S$  цього тіла. Отже, вивчаючи плоскопаралельний рух тіла, достатньо розглядати рух його плоского перерізу  $S$ , тобто рух плоскої фігури в її площині. Для цього введемо систему координат  $Ox$ , у якій розглянемо рух плоского

перерізу  $S$  (Рис. 13.3).

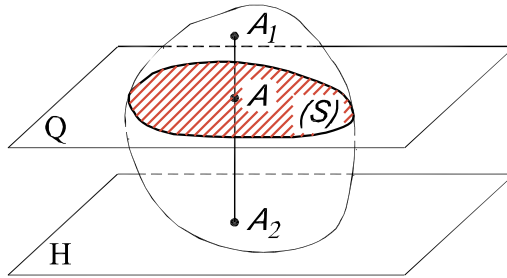


Рисунок 13.2

Положення плоскої фігури в площині  $Oxy$  повністю визначається положенням якої-небудь прямої  $AB$  цієї фігури, а положення прямої  $AB$  можна визначити, задавши координати  $x_A$  та  $y_A$  точки  $A$  і кут  $\varphi$  між прямою  $AB$  та віссю  $x$ .

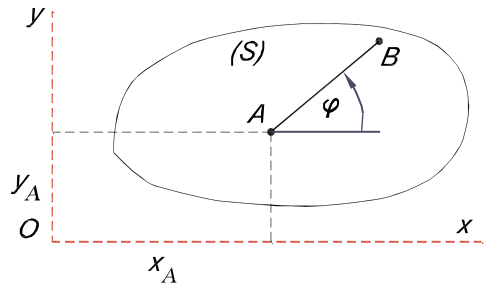


Рисунок 13.3

Під час руху тіла величини  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $\varphi$  будуть змінюватися, вони є функціями часу  $t$ :

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t). \quad (13.1)$$

Якщо ці функції задані, то в кожний момент часу можна знайти положення плоскої фігури. Тобто рівняння (13.1) визначають **закон руху** цієї фігури. Точку  $A$ , за допомогою якої визначають положення плоскої фігури, називають **полюсом**.

Покажемо, що **плоский рух можна розглядати як складний рух, що складається з поступального та обертального рухів**. Для цього розглянемо переміщення плоскої фігури із заданого положення I в інше положення II (Рис. 13.4). Оскільки положення фігури повністю визначається положенням прямої  $AB$ , надалі положення фігури будемо зображати на рисунку тільки цією прямою.



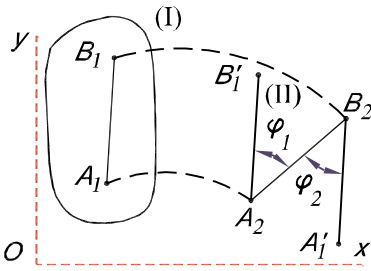


Рисунок 13.4

Переміщення фігури з положення I в положення II може бути здійснене наступним чином. Спочатку фігуру перемістимо поступально так, щоб точка  $A$ , рухаючись по своїй траєкторії, перейшла з положення  $A_1$  у положення  $A_2$ , а пряма зайняла положення  $A_2B'_1$ . Потім повернемо фігуру навколо точки  $A_2$  на кут  $\varphi_1$  так,

щоб фігура зайняла положення II. Слід пам'ятати, що в реальному русі обидва ці переміщення здійснюються разом за один і той же час.

З'ясуємо, як зміняться складові частини переміщення фігури при зміні полюса. Візьмемо за полюс точку  $B$  прямої  $AB$ . Поступальна частина загального переміщення при цьому зміниться (точка  $B$  рухається інакше, ніж точка  $A$ ). Але обертальна частина переміщення залишається незмінною за величиною та напрямом обертання:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \cdot \quad (13.2)$$

Сказане вище про розкладання плоского руху стосувалось кінцевих переміщень. Проте все залишається справедливим і для елементарних переміщень у кожний момент руху фігури. Отже, можна зробити висновок, що **рух плоскої фігури в її площині завжди можна розкласти на два рухи: 1) поступальний рух, в якому всі точки цієї фігури рухаються так, як будь-яка точка цієї фігури, вибрана за полюс, і 2) обертальний рух фігури навколо полюса.**

Основними кінематичними характеристиками плоского руху є швидкість та прискорення поступального руху, які дорівнюють швидкості і прискоренню полюса ( $\vec{v}_{\text{пост}} = \vec{v}_A$ ,  $\vec{a}_{\text{пост}} = \vec{a}_A$ ), а також кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  обертального руху навколо полюса. Значення цих характеристик у будь-який

момент часу можна знайти за рівняннями (13.1). При цьому, щоб визначити параметри обертального руху, зв'яжемо з точкою  $A$ , вибраною за полюс, рухоми систему координат  $Ax'y'$ , осі якої під час руху залишаються паралельними нерухомим осям  $Oxy$  (Рис. 13.5). Розглянемо в рухомій системі координат обертальний рух фігури навколо точки  $A$ . Кутові швидкість та прискорення визначають, як відомо, за формулами:

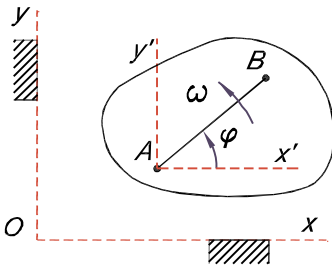


Рисунок 13.5

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (13.3)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \quad (13.4)$$

Диференціюючи рівняння (13.2) за часом, знаходимо що  $\omega_1 = \omega_2$  і  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , тобто кутова швидкість та кутове прискорення тіла не залежать від вибору полюса.

### 13.2. Теорема про швидкість точки плоскої фігури

**Теорема.** Швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса та швидкості цієї точки в її обертальному русі разом з плоскою фігурою навколо цього полюса.

**Доведення.** Розглянемо рух плоскої фігури в площині рисунку. Точку  $A$ , швидкість якої відома й дорівнює  $\vec{v}_A$ , виберемо за полюс.

Визначимо швидкість будь-якої іншої точки плоскої фігури, наприклад, точки  $M$  (Рис. 13.6). Рух точок  $A$  і  $M$  визначимо радіусами-векторами  $\vec{r}_A$  і  $\vec{r}_M$ , проведеними з деякої нерухомої точки  $O$  площини. Тоді в довільний момент часу між векторами  $\vec{r}_A, \vec{r}_M$

і  $\vec{r} = \overline{AM}$  має місце співвідношення

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}.$$

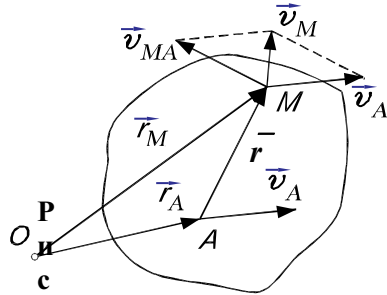


Рисунок 13.6

Диференціюючи обидві частини рівності за часом, одержуємо

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ або } \vec{v}_M = \vec{v}_A + \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Оскільки для твердого тіла віддаль  $AM = const$ , то вектор  $\vec{r}$  під час руху фігури змінюється лише за напрямком і похідна  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  є швидкістю точки M в її обертовому русі навколо полюса A, яку позначимо  $\vec{v}_{MA}$ .

Обертальну швидкість  $\vec{v}_{MA}$  можна записати у вигляді векторного добутку вектора кутової швидкості плоскої фігури  $\vec{\omega}$  на радіус-вектор  $\vec{r}$  точки M відносно полюса A

$$\vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (13.5)$$

Вектор  $\vec{v}_{MA}$  направлений перпендикулярно до відрізка AM у бік обертання плоскої фігури і має модуль

$$v_{MA} = \omega \cdot AM. \quad (13.6)$$

Отже швидкість точки M фігури визначають за формулою

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (13.7)$$

або

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \quad (\vec{v}_{MA} \perp MA) \quad (13.8)$$

і теорема доведена.

Швидкість точки  $M$  зображають діагоналлю паралелограму, побудованого в точці  $M$  на векторах  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_{MA}$  (Рис. 13.6).

### 13.3. Теорема про проєкції швидкостей двох точок тіла

Із формули (13.8) легко одержати рівність, що зв'язує величини швидкостей двох точок плоскої фігури. Для цього спроектуємо векторне рівняння (13.8) на лінію  $AM$  (вісь  $Ax$  на рис. 13.7):

$$v_{Mx} = v_{Ax} + v_{MAx}.$$

Але швидкість  $\vec{v}_{MA}$  перпендикулярна до  $AM$ , тому  $v_{MAx} = 0$ . Отже,

$$v_{Mx} = v_{Ax} \quad (13.9)$$

або 
$$v_M \cdot \cos \beta = v_A \cdot \cos \alpha. \quad (13.10)$$

Останні формули виражають таку **теорему: проєкції швидкостей двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки, дорівнюють одна одній.**

Якщо напрям векторів відомий, то ця теорема дозволяє знайти одну з невідомих швидкостей. Але у випадку, коли вектори  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_M$  перпендикулярні до прямої  $AM$ , ця теорема не дає результату і слід застосовувати інші методи.

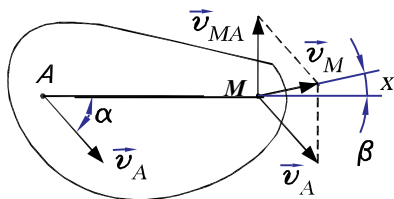


Рисунок 13.7

### 13.4. Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей

У плоскому русі, якщо  $\omega \neq 0$ , завжди існує точка, шви-

дкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром швидкостей.

Нехай у даний момент часу відома швидкість  $\vec{v}_A$  деякої точки  $A$  плоскої фігури і  $\omega \neq 0$ . Доведемо, що миттєвий центр швидкостей розміщений на прямій, перпендикулярній до  $\vec{v}_A$ . Для цього візьмемо точку  $M$  на цій прямій (Рис. 13.8) і визначимо її швидкість за допомогою формули розподілу швидкостей (13.8):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

Вектор швидкості  $\vec{v}_{MA}$  для заданого напрямку кутової швидкості  $\omega$  буде напрямлений протилежно  $\vec{v}_A$  і за величиною дорівнювати  $v_A = \omega \cdot AM$ . Якщо змінювати положення точки  $M$ , завжди можна знайти таку точку, позначимо її буквою  $P$ , для якої  $v_{PA} = \omega \cdot AP = v_A$  (на рис. 13.8 показано розподіл швидкостей точок на прямій  $AP$ ). Для цього потрібно взяти відстань  $AP = \frac{v_A}{\omega}$ .

Отже положення точки  $P$  є однозначно визначеним і швидкість цієї точки

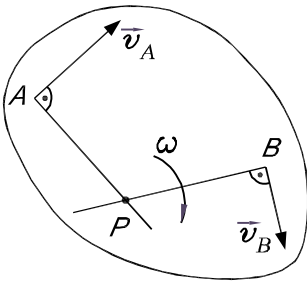


Рисунок 13.9

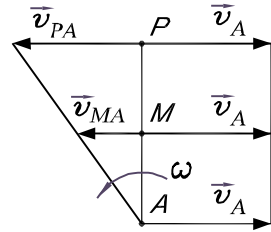


Рисунок 13.8

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0.$$

Припустимо тепер, що ми знаємо положення миттєвого центра швидкостей – точки  $P$  (Рис 13.9). Взавши цю точку за полюс, визначимо за допомогою формули (13.8) швидкості точок плоскої фігури, враховуючи, що  $\vec{v}_P = 0$ ,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AP}; \quad (13.11)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP} = \vec{v}_{BP}. \quad (13.12)$$

Тобто швидкості точок  $A$  і  $B$  визначаємо як швидкості в обертальному русі навколо точки  $P$ . Вони напрямлені перпендикулярно до відрізків  $AP$  і  $BP$  у бік обертання фігури, а їх величини можна обчислити за формулами:

$$v_A = v_{AP} = \omega \cdot AP, \quad (13.13)$$

$$v_B = v_{BP} = \omega \cdot BP. \quad (13.14)$$

На рис. 13.9 показано розподіл швидкостей точок плоскої фігури відносно миттєвого центра швидкостей.

З останніх формул отримаємо, що

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP} \quad \text{і} \quad \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}. \quad (13.15)$$

Отже, формули (13.11) і (13.12), а також формули, що з них випливають, показують, що швидкості точок у кожний момент руху плоскої фігури можна визначити так, як при обертанні цієї фігури навколо миттєвого центра швидкостей.

Наведені формули дозволяють обчислювати швидкості точок плоскої фігури та визначати її кутову швидкість. Але для цього спочатку потрібно знайти положення миттєвого центра швидкостей. Зазначимо, що це положення весь час змінюється, цим пояснюється назва цієї точки.

З рис. 13.9 видно, що в загальному випадку **миттєвий центр швидкостей є точкою перетину перпендикулярів, проведених до векторів швидкостей точок фігури.**

Розглянемо окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей.

1. Якщо плоска фігура рухається так, що її контур котиться без ковзання по деякій нерухомій поверхні (як, наприклад, при коченні колеса, (Рис. 13.10)), то для точки  $P$  рухомого контуру, в якій він стикається з нерухомою

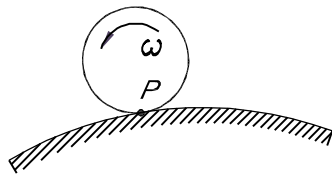


Рисунок 13.10

поверхнею,  $v_P = 0$ . Ця швидкість дорівнює нулю тому, що через відсутність відносного руху точок стикання їх швидкості повинні бути однаковими, а одна з цих точок належить нерухомій поверхні. Отже, точка  $P$  є миттєвим центром швидкостей.

2. Швидкості двох точок плоскої фігури паралельні та ці точки розміщені на одному перпендикулярі до напрямів їх швидкостей (Рис. 13.11). Застосовуючи рівняння (13.15), точку  $P$  можна знайти графічним способом, якщо провести через кінці  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$  пряму до перетину з лінією  $AB$ . Тут можливі два випадки, коли точка  $P$  розміщена за межами (Рис. 13.11, а) або посередині відрізка  $AB$  (Рис. 13.11, б).

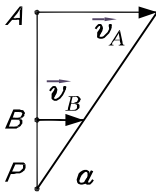


Рисунок 13.11

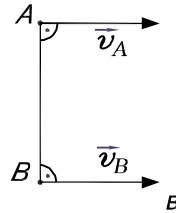
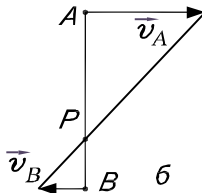


Рисунок 13.12

3. Швидкості точок  $A$  і  $B$  у даний момент паралельні між собою та не перпендикулярні до лінії  $AB$  (Рис. 13.12). Перпендикуляри до векторів  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$  не перетинаються. Кажуть, що в цьому разі миттєвий центр швидкостей розміщений у нескінченності. Характеристики руху можна знайти, якщо в формулах (13.15) відстані до точки  $P$  нескінченно збільшувати. Отримаємо, що швидкості точок  $A$  і  $B$  та всіх інших точок у даний момент однакові, а кутова швидкість фігури дорівнює нулю.

Рух плоскої фігури в даний момент називають **миттєво поступальним**.

Розглянуті випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей дозволяють за допомогою формул (13.13 – 13.15) обчислювати швидкості точок плоскої фігури та її кутову швид-

кість.

Зауважимо, що для дослідження руху механізмів, тобто систем, які складаються з декількох тіл (ланок), миттєві центри швидкостей та кутові швидкості треба визначати окремо для кожного тіла, яке рухається плоскопаралельно.

### 13.5. План швидкостей

У інженерній практиці при визначенні швидкостей точок плоскої фігури часто використовують плани швидкостей.

Планом швидкостей називають графічне зображення векторів швидкостей точок плоскої фігури у фіксований момент її руху.

Для побудови плану швидкостей потрібно знати величину та напрям швидкості однієї точки плоскої фігури, напрям швидкості будь-якої іншої її точки і взаємне розміщення точок фігури. Нехай для даного моменту часу відомі швидкість  $\vec{v}_A$  точки  $A$  і напрям швидкості точки  $B$  (Рис. 13.13, а).

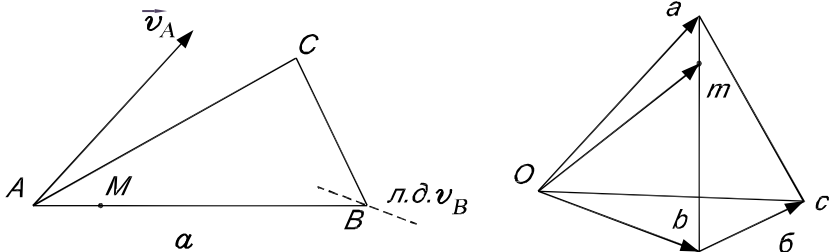


Рисунок 13.13

Потрібно визначити для цього моменту часу швидкість точки  $B$ , а також швидкість деякої точки  $C$  цієї фігури. Для визначення швидкості точки  $B$  виберемо за полюс точку  $A$ . Тоді, згідно з формулою (13.8), швидкість точки  $B$  визначаємо так:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (13.16)$$

де швидкість  $\vec{v}_{BA}$  перпендикулярна до  $AB$ .



Для побудови плану швидкостей від довільної точки  $O$  у вибраному масштабі вектор  $\overrightarrow{Oa} = \vec{v}_A$  (Рис. 13.13, б) і проведемо пряму  $Ob$ , паралельну лінії  $Bb$ , на якій від точки  $O$  будемо відкладати вектор швидкості  $\vec{v}_B$ . Отже, пряма  $Ob$  – це геометричне місце кінців вектора  $\vec{v}_B$ .

З іншого боку згідно з формулою (13.16) цей вектор дорівнює  $\vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ , тобто кінець вектора  $\vec{v}_B$  збігається з кінцем швидкості  $\vec{v}_{BA}$ , яка напрямлена вздовж прямої  $ab$ , перпендикулярної до  $AB$ . Таким чином, точка  $b$  перетину ліній  $Ob$  і  $ab$ , паралельних швидкостям  $\vec{v}_B$  і  $\vec{v}_{BA}$ , визначає у вибраному масштабі ці швидкості:

$$\vec{v}_B = \overrightarrow{Ob} \quad \text{і} \quad \vec{v}_{AB} = \overrightarrow{ab}.$$

Щоб знайти швидкість довільної точки  $C$ , яка не розміщена на відріжку  $AB$ , приймаючи послідовно за полюси точки  $A$  і  $B$ , запишемо для цієї швидкості два векторні рівняння

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}, \quad (13.17)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}. \quad (13.18)$$

Беручи до уваги рівняння (13.17), проведемо з точки  $a$  – кінця вектора  $\vec{v}_A$  – пряму  $ac$ , перпендикулярну до відрізка  $AC$  або паралельну швидкості  $\vec{v}_{CA}$ . На цій прямій розміщений кінець вектора  $\vec{v}_{CA}$  і  $\vec{v}_C$ , що дорівнює сумі  $\vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$ .

Ураховуючи тепер рівняння (13.18) та проводячи з точки  $b$  пряму  $bc$ , перпендикулярну до відрізка  $BC$ , з'ясуємо, що кінець швидкості  $\vec{v}_C$  повинен лежати і на цій прямій. Отже, знаходячи точку  $c$  перетину прямих  $ac$  і  $bc$ , визначимо швидкості

$$\vec{v}_C = \overrightarrow{Oc}, \quad \vec{v}_{CA} = \overrightarrow{ac}, \quad \vec{v}_{CB} = \overrightarrow{bc}.$$

Як відомо (див. формулу (13.7)),  $v_{BA} = ab = \omega \cdot AB$ ;  $v_{CA} = ac = \omega \cdot AC$ ;  $v_{CB} = bc = \omega \cdot BC$ , тобто

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \omega. \quad (13.19)$$

Таким чином, відрізки, які з'єднують кінці векторів швидкостей на плані швидкостей, за напрямком перпендикулярні до відрізків, що з'єднують відповідні точки фігури, а за модулем пропорційні до цих відрізків.

Звідси випливає, що швидкість довільної точки  $M$ , яка розміщена на відріжку  $AB$ , знайдемо, якщо поділимо відрізок  $ab$  у тому ж відношенні, в якому точка  $M$  ділить відрізок  $AB$  ( $\frac{am}{mb} = \frac{AM}{MB}$ ).

Тоді вектор  $\overrightarrow{Om}$  у вибраному масштабі виражає швидкість  $\vec{v}_M$ . Модуль кутової швидкості фігури, якщо побудований план швидкостей, визначають за залежністю (13.19).

### 13.6. Прискорення точки плоскої фігури

**Теорема.** Прискорення довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса та прискорення точки в її обертальному русі разом з фігурою навколо полюса.

**Доведення.** Швидкість довільної точки  $M$  плоскої фігури, згідно з формулою (13.7), дорівнює

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де  $\vec{\omega}$  - кутова швидкість фігури;  $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$  - радіус-вектор, проведений з полюса  $A$  у точку  $M$  (Рис. 13.6).

Продиференціювавши обидві частини цієї векторної рівності, одержимо:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (13.20)$$

Тут  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ ,  $\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{a}_M$ ,  $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$ . Розкриємо зміст останнього доданку в формулі (13.20). Ураховуючи, що  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ,  $\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 \cdot \vec{r}$ , рівність (13.20) запишемо у вигляді

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \omega^2 \cdot \vec{r}.$$

Уведемо позначення

$$\vec{a}_{MA}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_{MA}^n = \omega^2 \cdot \vec{r}. \quad (13.21)$$

Прискорення  $\vec{a}_{MA}^{\tau}$  і  $\vec{a}_{MA}^n$  є відповідно обертальним і доцентровим прискорення точки  $M$  при обертальному русі фігури навколо полюса  $A$ . Отже,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n, \quad (13.22)$$

де векторна сума останніх двох доданків є повним прискоренням точки  $M$  при обертанні фігури навколо полюса  $A$

$$\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n. \quad (13.23)$$

Таким чином,  $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}$ . (13.24)

Теорему доведено.

Вектор  $\vec{a}_{MA}^{\tau}$  напрямлений перпендикулярно до відрізка  $AM$  у бік дугової стрілки кутового прискорення  $\varepsilon$ , а вектор  $\vec{a}_{MA}^n$  завжди напрямлений від точки  $M$  до полюса. Очевидно, що вектори  $\vec{a}_{MA}^{\tau}$  і  $\vec{a}_{MA}^n$  перпендикулярні, тому модуль повного прискорення обертального руху

$$a_{MA} = \sqrt{(a_{MA}^{\tau})^2 + (a_{MA}^n)^2} = MA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (13.25)$$

бо  $a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot MA$ ;  $(\vec{\varepsilon} \perp \vec{r})$ ,  $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot MA$  (13.26)

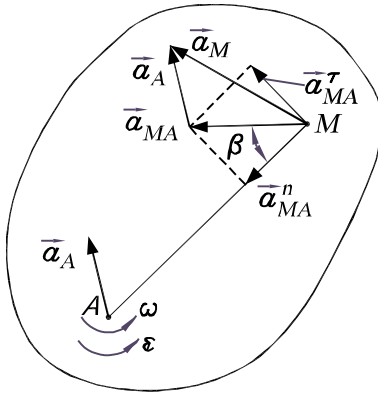


Рисунок 13.14

Кут  $\beta$ , який утворює вектор  $\vec{a}_{MA}$  з відрізком  $AM$  (Рис. 13.14), визначають із співвідношення

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (13.27)$$

З формули (13.27) випливає, що кут  $\beta$  не залежить від вибору полюса та в даний момент часу має однакове значення для всіх точок плоскої фігури.

### 13.7. Миттєвий центр прискорень. Визначення прискорень точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра прискорень

**Теорема.** При непоступальному русі плоскої фігури у своїй площині в кожний момент часу існує точка, незмінно зв'язана з плоскою фігурою, прискорення якої дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром прискорень.

**Доведення.** Припустимо, що нам відомо прискорення  $\vec{a}_A$  точки  $A$ , а також кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  фігури (Рис. 13.15). Обчислимо величину кута  $\beta$  за формулою (13.27) і проведемо під цим кутом до вектора  $\vec{a}_A$  промінь, який відкладемо у бік дугової стрілки кутового прискорення  $\varepsilon$ . На цьому промені відкладемо відрізок  $AQ$ , довжина якого дорівнює

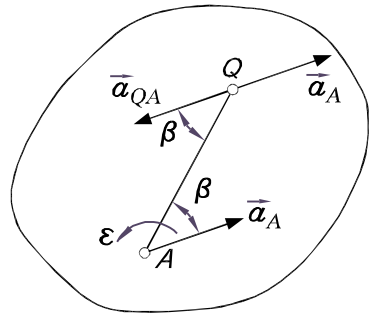


Рисунок 13.15

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (13.28)$$

Покажемо, що  $\vec{a}_Q = 0$ , тобто, що точка  $Q$  є миттєвим центром прискорень. Дійсно, згідно з формулами (13.22), (13.23), (13.26), (13.28)

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA},$$

$$\text{де } a_{QA} = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A.$$

Крім цього, вектор  $\vec{a}_{QA}$  утворює з відрізком  $AQ$  такий самий кут  $\beta$ , який утворює з  $AQ$  і вектор  $\vec{a}_A$ . Це означає, що вектор  $\vec{a}_{QA}$  паралельний вектору  $\vec{a}_A$  і в силу прийнятого правила відліку кута  $\beta$  вектори  $\vec{a}_A$  і  $\vec{a}_{QA}$  будуть завжди протилежно напрямлені, тобто  $\vec{a}_A = -\vec{a}_{QA}$  (Рис. 13.15). Звідси випливає, що

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA} = 0$$

і точка  $Q$  є миттєвим центром прискорень. Теорема доведена. Зауважимо, що це доведення одночасно дає правило побудови миттєвого центра прискорень. Якщо положення миттєвого центра прискорень  $Q$  відоме, то, вибравши його за полюс, для прискорення довільної точки  $M$  плоскої фігури за формулою (13.24) одержуємо

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{MQ} = \vec{a}_{MQ}, \quad \text{бо } \vec{a}_Q = 0,$$

$$\text{і} \quad a_M = a_{MA} = MQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (13.29)$$

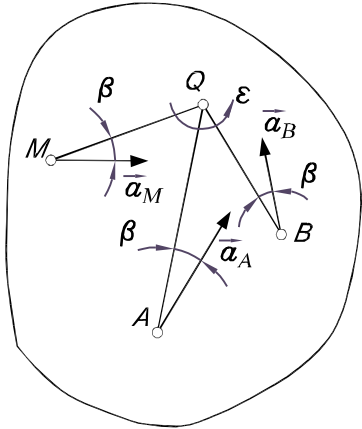
Отже прискорення всіх точок фігури в даний момент часу пропорційні їх відстаням до миттєвого центра прискорень  $Q$ :

$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (13.30)$$

Крім цього кути, які утворюють вектори прискорень з відрізками, що з'єднують відповідні точки з центром  $Q$ , однакові та дорівнюють  $\beta$  (Рис. 13.16).

Це означає, що **прискорення всіх точок плоскої фігури розподілені в даний момент так, ніби вона обертається навколо центра  $Q$ , як нерухомого.**

Зауважимо, що миттєвий центр швидкостей  $P$  і миттєвий центр прискорень  $Q$  – різні точки. Вони збігаються лише в тому випадку, коли фігура здійснює обертальний рух навколо нерухомого центра обертання.



**Рисунок 13.16**

**Задача 13.1.** Для заданого положення механізму (Рис. 13.17) обчислити швидкості та прискорення точок  $A, B, C, D$  і кутові швидкості та прискорення всіх ланок, якщо кривошип  $OA$  обертається з кутовим прискоренням  $\varepsilon_{OA} = 4 \frac{rad}{c^2}$ , маючи в даний момент кутову

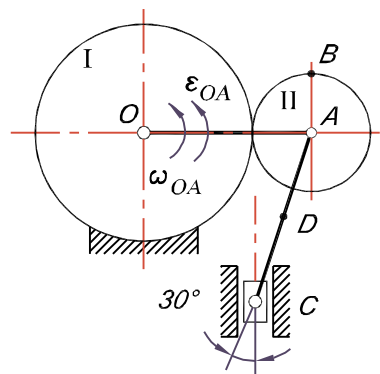
швидкість  $\omega_{OA} = 2 \frac{rad}{c}$ , а також

$OA = 30\text{см}$ ,  $r = 10\text{см}$ ,  $AC = 45\text{см}$ ,  
 $AD = 20\text{см}$ . Кочення колеса II по колесу I відбувається без ковзання.

### Розв'язок

У даному механізмі кривошип  $OA$  перебуває в обертальному русі, а колесо II і ланка  $AC$  – в плоскопаралельному русі.

Для розв'язку задачі розглянемо



**Рисунок 13.17**

поспідовно рух кожної ланки окремо.

а) Кривошип  $OA$  перебуває в обертальному русі (Рис. 13.18), а тому швидкість та прискорення точки  $A$  обчислимо за відомими кутовою швидкістю і кутовим прискоренням:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 30 = 60 \frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau;$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 30 = 120 \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

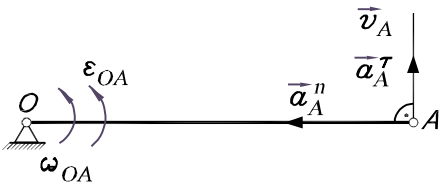


Рисунок 13.18

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 4 \cdot 30 = 120 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Напрямки швидкості  $\vec{v}_A$  і складових прискорення  $\vec{a}_A$  показані на рис. 13.18.

б) Колесо II котиться без ковзання по нерухомому колесу I й перебуває в плоскопаралельному русі. Швидкість і прискорення центра  $A$  вже відомі, а точка дотику до колеса I є миттєвим центром швидкостей унаслідок відсутності ковзання. За цими даними потрібно обчислити швидкість і прискорення точки  $B$ , кутову швидкість та кутове прискорення колеса II. Оскільки точка  $P$  (Рис. 13.19) є миттєвим центром швидкостей, швидкість точки  $B$  напрямлена перпендикулярно до прямої  $BP$  у бік обертання колеса <sup>22</sup> і її обчислюємо за співвідношенням (13.15):

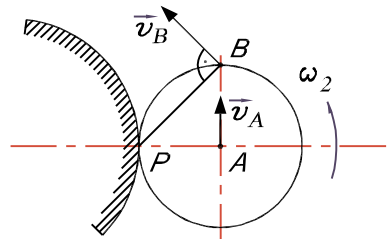


Рисунок 13.19

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AB}; v_B = v_A \cdot \frac{BP}{AP} = 60 \cdot \sqrt{2} = 84,85 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

За співвідношенням (13.15) можна також обчислити кутову швидкість колеса II :

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}; \quad \omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_{OA} \cdot OA}{r} = \frac{2 \cdot 30}{10} = 6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Зазначимо, що швидкість  $\omega_2$  відповідає заданому моменту часу. Щоб знайти кутове прискорення колеса II, продиференціюємо вираз

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_{OA} \cdot OA}{r} = 3\omega_{OA}$$

$$\text{і знайдемо } \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 3 \cdot \frac{d\omega_{OA}}{dt} = 3 \cdot \varepsilon_{OA} = 3 \cdot 4 = 12 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

На рис. 13.20, а показано напрям  $\varepsilon_2$  з урахуванням того, що обертання колеса 2 прискорене ( $\omega_2$  збільшується).

Прискорення точки можна визначити за формулою розподілу прискорень

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

або

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Знаючи  $\omega_2$  і  $\varepsilon_2$ , обчислимо

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot r = 6^2 \cdot 10 = 360 \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot r = 12 \cdot 10 = 120 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

і покажемо в точці B усі складові прискорення  $\vec{a}_B$  (Рис. 13.20, а). Додавши прискорення, що напрямлені по одній прямій, отримаємо два взаємно перпендикулярних вектори, які за величиною дорівнюють (Рис. 13.20, б)

$$a_1 = a_A^n + a_{BA}^\tau \quad \text{і} \quad a_2 = a_{BA}^n - a_A^\tau.$$

Тоді

$$a_B = \sqrt{(a_B^n + a_{BA}^\tau)^2 + (a_{BA}^n - a_A^\tau)^2},$$



або

$$a_B = 339,4 \frac{см}{с^2} = 3,39 \frac{м}{с^2}.$$

Напрям вектора  $\vec{a}_B$  можна знайти з побудованого прямокутника (Рис. 13.20, б).

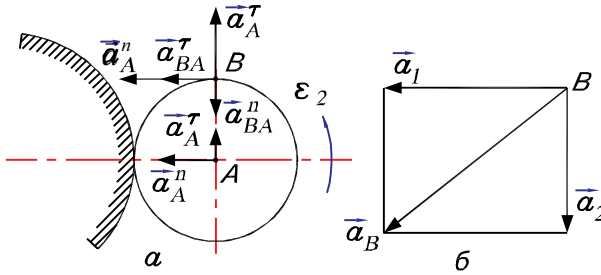


Рисунок 13.20

в). Ланка  $AC$ , як і колесо  $\Pi$ , перебуває у плоскопаралельному русі. Знаючи швидкість точки  $A$ , знайдемо швидкості інших точок шатуна  $AC$  і його кутову швидкість за допомогою миттєвого центра швидкостей і плану швидкостей (Рис. 13.21, а, б).

Оскільки точка  $C$  рухається вздовж вертикальної лінії, тобто швидкість  $\vec{v}_C$  паралельна до швидкості  $\vec{v}_A$ , перпендикуляри до швидкостей  $\vec{v}_C$  і  $\vec{v}_A$  не перетинаються, то миттєвий центр швидкостей розміщений у нескінченності.

Отже швидкості всіх точок ланки в даний момент однакові

$$v_C = v_D = v_A = 60 \frac{см}{с}, \text{ а кутова швидкість ланки } \omega_{AC} = 0.$$

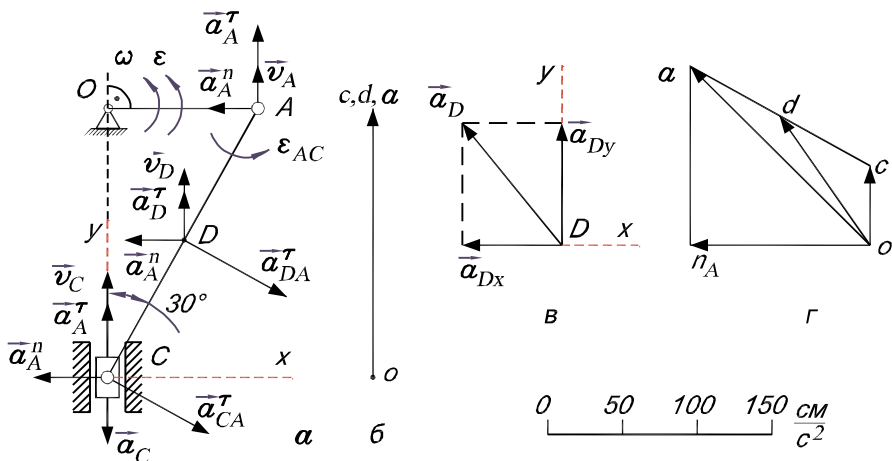


Рисунок 13.21

Визначимо тепер швидкості точок ланки  $AC$  за допомогою плану швидкостей (Рис. 13.21, б). Для цього відкладемо від довільної точки  $O$  відрізок  $Oa$ , який зображує у вибраному масштабі швидкість точки  $A$ .

Для визначення швидкості точки  $C$  застосовуємо формулу  $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$ , в якій напрями швидкостей  $\vec{v}_C$  і  $\vec{v}_A$  відомі.

З точки  $a$  - кінця вектора  $\vec{v}_A$  - проводимо перпендикулярну до ланки  $AC$  лінію, вздовж якої напрямлена швидкість  $\vec{v}_{CA}$ , а з точки  $O$  - вертикальну лінію, паралельну швидкості  $\vec{v}_C$ . Точка  $c$  перетину цих ліній визначає швидкості  $\vec{v}_C = \vec{Oc}$  і  $\vec{v}_{CA} = \vec{ac}$ .

Отже  $v_C = v_A = 60 \frac{cm}{c}$ ,  $v_{CA} = 0$ . Щоб визначити  $\vec{v}_D$ , треба розділити відрізок  $ac$  на плані швидкостей на частини, пропорційні відріzkам  $AD$  і  $DC$  ланки  $AC$ . Оскільки  $ac = 0$ , то точка  $d$  збігається з точками  $a$  і  $c$ ,  $v_D = v_C = v_A = 60 \frac{cm}{c}$ . Кутова швидкість ланки  $AC$  дорівнює

$$\omega_{AC} = \frac{v_{CA}}{AC} = 0.$$

Прискорення точки  $C$  знайдемо за формулою розподілу прискорень (13.23):

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau, \quad \text{де } a_{CA}^n = \omega_{AC}^2 \cdot AC = 0.$$

Отже 
$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{CA}^\tau.$$

У цій формулі прискорення  $\vec{a}_C$  і  $\vec{a}_{CA}^\tau$  невідомі за величиною. Лінії ж дії їх відомі:  $\vec{a}_C$  напрямлена по вертикалі, а  $\vec{a}_{CA}^\tau$  - перпендикулярно до  $AC$ .

Напрямки цих векторів уздовж вказаних прямих виберемо довільно. Якщо при обчисленні одержимо від'ємні значення, то їх напрямки змінимо на протилежні.

Невідомі прискорення в останньому рівнянні обчислимо проектуванням цього рівняння на осі координат  $Cx$  і  $Cy$

$$0 = -a_A^n + a_{CA}^\tau \cdot \cos 30^\circ; \quad -a_C = a_A^\tau - a_{CA}^\tau \cdot \sin 30^\circ.$$

З цих рівностей одержимо

$$a_{CA}^\tau = \frac{a_A^n}{\cos 30^\circ} = \frac{120}{0,866} = 138,6 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a_C = -a_A^\tau + a_{CA}^\tau \cdot \sin 30^\circ = -120 + 138,6 \cdot 0,5 = -50,7 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Кутове прискорення ланки  $AC$  дорівнює

$$\varepsilon = \frac{a_{CA}^\tau}{AC} = \frac{138,6}{45} = 3,08 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Від'ємний знак  $a_C$  вказує на те, що напрям вектора цього прискорення протилежний до прийнятого. Напрямок кутового прискорення  $\varepsilon_{AC}$  з урахуванням напрямку вектора  $\vec{a}_{CA}^\tau$  показано на рис. 13.21, а.

Прискорення точки  $D$  визначено за формулою прискорень

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{DA}^n + \vec{a}_{DA}^\tau,$$

де  $a_{DA}^n = 0$ , а  $a_{DA}^\tau$  може бути обчислене за відомим кутовим прискоренням  $\varepsilon_{AC}$ :

$$a_{DA}^\tau = \varepsilon_{CA} \cdot AD = 3,08 \cdot 20 = 61,6 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Проектуючи тепер векторне рівняння для  $\vec{a}_D$  на ті ж самі осі координат  $Cx$  і  $Cy$ , одержимо (Рис. 13.21, а)

$$a_{Dx} = -a_A^n + a_{DA}^\tau \cdot \cos 30^\circ = -120 + 61,6 \cdot 0,866 = -66,7 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a_{Dy} = a_A^\tau - a_{DA}^\tau \cdot \sin 30^\circ = 120 - 61,6 \cdot 0,5 = 89,2 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a_D = \sqrt{(a_{Dx})^2 + (a_{Dy})^2} = 111,4 \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

а напрям вектора  $\vec{a}_D$  визначено на рис. 13.21, в.

Визначимо ще прискорення точок ланки  $AC$  за допомогою плану прискорень (Рис. 13.21, г). З довільної точки  $O$  у вибраному масштабі відкладемо відрізки  $On_A$  і  $n_A a$ , що виражають прискорення  $\vec{a}_A^n$  і  $\vec{a}_A^\tau$ , і проведемо вектор  $\vec{Oa} = \vec{a}_A$ . Щоб знайти прискорення точки  $C$  застосуємо, як і раніше, формулу прискорень

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau,$$

де прискорення  $\vec{a}_{CA}^n$  напрямлене вздовж ланки  $AC$ , а прискорення  $\vec{a}_{CA}^\tau$  перпендикулярне цій ланці. Але  $a_{CA}^n = \omega_{AC}^2 \cdot AC = 0$ , тому з точки  $a$  – кінця вектора  $\vec{a}_A$  – проводимо лінію, паралельну вектору  $\vec{a}_{CA}^\tau$  до перетину з вертикальною лінією, проведеною з точки  $O$ , вздовж якої напрямлене прискорення  $\vec{a}_C$ .

Точка  $c$  перетину цих ліній визначає прискорення  $\vec{a}_C = \vec{Oc}$  і  $\vec{a}_{CA}^r = \vec{ac}$ . З урахуванням масштабу знаходимо

$$a_C = 53 \frac{cm}{c^2}, \quad a_{CA}^r = 140 \frac{cm}{c^2}.$$

Щоб знайти прискорення точки  $D$ , поділимо відрізок  $ac$  на плані прискорень на відрізки  $ad$  і  $dc$  у відношенні  $\frac{ad}{dc} = \frac{AD}{DC}$ . Відрізок  $Od$ , що з'єднує точку  $O$  з точкою  $d$ , визначає прискорення точки  $D$ :  $\vec{a}_D = \vec{Od}$ , а величина прискорення  $a_D = 108 \frac{cm}{c^2}$ .

Зазначимо, що похибка при визначенні прискорень за допомогою плану прискорень не перевищує 5%.

### Контрольні запитання

1. Дайте визначення плоского руху.
2. Яку точку називають полюсом плоского руху?
3. Назвіть кінематичні характеристики плоского руху.
4. Сформулюйте теореми про швидкість та прискорення точки плоскої фігури.
5. Сформулюйте теорему про проекції швидкостей двох точок тіла.
6. Які точки називають миттєвими центрами швидкостей та прискорень?
7. У якому випадку миттєвий центр швидкостей та прискорень є сумісними точками?
9. Що називають планом швидкостей?

## Глава 14. Складний рух твердого тіла

Поняття складного руху тіла аналогічне до поняття складного руху точки. Так само як і для точки, для тіла розглядають переносний, відносний та абсолютний рухи. Означення цих рухів можна отримати з відповідних означень для точки, якщо замінити слово "точка" на слово "тіло".

Наприклад, переносним рухом тіла називають рух рухомої системи координат відносно нерухомої системи або рух тіла разом з рухомою системою координат відносно нерухомої. Задачею кінематики складного руху тіла є визначення залежностей між характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів.

Плоскопаралельний рух тіла, який розглянуто в попередній главі, є одним із випадків складного руху тіла. Розглянемо також інші випадки такого руху.

### 14.1. Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей

Розглянемо тіло (диск на рис. 14.1), який обертається навколо своєї осі  $A_1A$ . Ця вісь закріплена на кривошипі  $OA_1$ , який, в свою чергу, обертається навколо осі  $OB$ , паралельної  $A_1A$ .

Припустимо, що диск і кривошип обертаються в один бік з кутовими швидкостями відповідно  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . На рис. 14.1 показано дугові стрілки, а також вектори кутових швидкостей. Диск бере участь одночасно у двох обертальних рухах: 1) навколо осі  $A_1A$ , з кутовою швидкістю  $\omega_1$  (відносний рух); 2) навколо осі  $OB$  з кутовою швидкістю  $\omega_2$  (переносний рух).

Отже, рух диска – складний.

Визначимо характер абсолютного руху диска та параметри цього руху. Для цього розглянемо швидкості його точок  $A$  і  $B$ . Для точки  $A$

$$v_A = \omega_2 \cdot OA_1 = \omega_2 \cdot AB.$$

Щоб визначити  $v_B$ , розглянемо рух точки  $B$  як складний з переносним обертальним рухом навколо осі  $OB$ . Оскільки переносна швидкість у такому русі дорівнює нулю, маємо

$$v_B = v_{Br} = \omega_1 \cdot AB.$$

Вектори  $\vec{v}_A$  і  $\vec{v}_B$  паралельні між собою (обидва перпендикулярні до  $AB$ ) і напрямлені у протилежні боки.

Швидкості точок  $A$  і  $B$  також можна визначити іншим способом. Приймаючи до уваги, що абсолютний рух диска – плоскопаралельний, знайдемо положення миттєвого центра швидкостей – точки  $P$  (Рис. 14.1). Вважаючи, що навколо миттєвого центра швидкостей диск (точніше, плоский переріз диска) обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , запишемо

$$v_A = \omega \cdot AP, \quad v_B = \omega \cdot BP.$$

Поєднуючи вказані формули, отримаємо

$$v_A = \omega_2 \cdot AB = \omega \cdot AP; \tag{14.1}$$

$$v_B = \omega_1 \cdot AB = \omega \cdot BP. \tag{14.2}$$

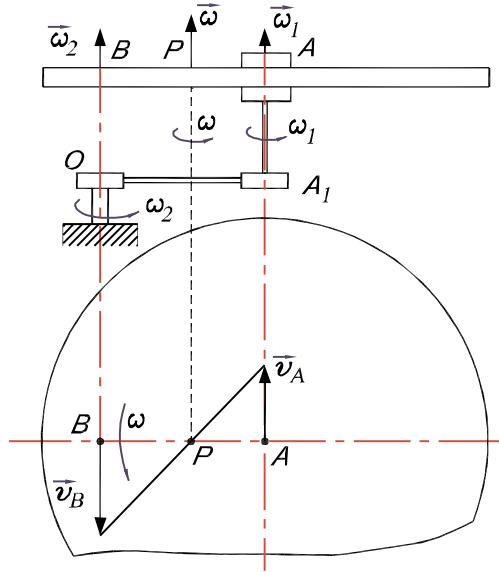


Рисунок 14.1

Додавши ці рівності, визначимо  $\omega$ :

$$(\omega_1 + \omega_2) \cdot AB = \omega(AP + BP),$$

або 
$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (14.3)$$

Ця рівність визначає кутову швидкість обертання плоского перерізу диска навколо точки  $P$ . Як відомо, швидкість точки  $P$  дорівнює нулю. Такі ж швидкості мають у даний момент точки диска, які лежать на прямій, що проходить через точку  $P$  перпендикулярно до диска. Цю пряму називають миттєвою віссю обертання диска. Таким чином, абсолютним рухом диска є обертальний рух навколо миттєвої осі, паралельної до осей переносного і відносного обертань, з кутовою швидкістю  $\omega$ .

З рівностей (14.1) і (14.2) також випливає, що

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BP} = \frac{\omega_2}{AP}. \quad (14.4)$$

Формули (14.3) і (14.4) визначають кутову швидкість абсолютного обертального руху та положення миттєвої осі обертання.

**Отже, при додаванні двох напрямлених в один бік обертальних рухів тіла навколо паралельних осей абсолютним рухом тіла є миттєво обертальний рух навколо осі, паралельної заданим, з кутовою швидкістю, що дорівнює сумі кутових швидкостей складових обертань. Миттєва вісь абсолютного обертання поділяє відстань між осями складових обертань на відрізки, обернено пропорційні величинам заданих кутових швидкостей.**

Якщо зобразити вектор  $\vec{\omega}$  кутової швидкості тіла в абсолютному русі, то побачимо, що вектори кутових швидкостей при обертанні навколо паралельних осей додають як вектори паралельних сил у статиці.

Розглянемо випадок додавання обертальних рухів тіла, коли напрями переносного та відносного обертань протилежні, при-



чому  $\omega_1 \neq \omega_2$ , наприклад,  $\omega_1 > \omega_2$  (Рис. 14.2). Тоді, замість рівностей (14.1) і (14.2) отримаємо

$$v_A = \omega_2 \cdot AB = \omega \cdot AP; \quad (14.5)$$

$$v_B = \omega_1 \cdot AB = \omega \cdot BP, \quad (14.6)$$

звідси 
$$(\omega_1 - \omega_2) \cdot AB = (BP - AP)$$

або 
$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \quad (14.7)$$

Миттєва вісь у даному випадку розташована за межами відрізка  $AB$  за більшою кутовою швидкістю, а її положення, що впливає з рівностей (14.5) і (14.6), визначається рівністю (14.4).

Таким чином, **при додаванні двох протилежно напрямлених обертальних рухів з нерівними за модулем кутовими швидкостями навколо паралельних осей абсолютним рухом тіла є миттєво обертальний рух навколо осі, паралельної заданим осям, з кутовою швидкістю, що дорівнює арифметичній різниці кутових швидкостей складових обертань. Миттєва вісь абсолютного обертання зовні розділяє відстань між осями складових обертань на відрізки, обернено пропорційні до величин заданих кутових швидкостей.**

Вектори кутових швидкостей у цьому випадку, як і в попередньому, додають як вектори паралельних сил в статистиці.

Розглянемо випадок, коли **обертання навколо паралельних осей протилежні за напрямом і їх кутові швидкості однакові за величиною ( $\omega_1 = \omega_2$ )**. Таку сукупність обертальних рухів називають **парою обертань**, а вектори  $\bar{\omega}_1$  і  $\bar{\omega}_2$  утворюють **пару кутових швидкостей** (Рис. 14.3). У цьому разі отримуємо, що

$$v_A = \omega_2 \cdot AB, \quad v_B = \omega_1 \cdot AB$$

і 
$$v_A = v_B.$$

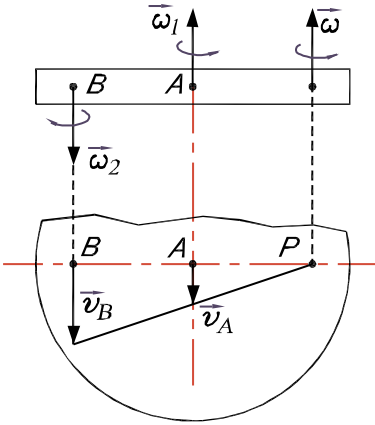


Рисунок 14.2

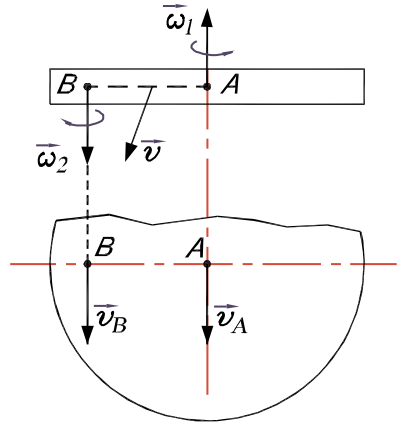


Рисунок 14.3

Тоді миттєвий центр швидкостей розміститься у нескінченності,  $\omega = 0$ , а всі точки тіла в даний момент матимуть однакові швидкості  $v = \omega_1 \cdot AB$ . Таким чином, абсолютний рух тіла буде поступальним (або миттєво поступальним) зі швидкістю  $\vec{v}$ , що дорівнює чисельно  $\omega_1 \cdot AB$  і напрямлена перпендикулярно до площини, яка проходить через вектори  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$ . Тобто величину та напрям вектора  $\vec{v}$  визначають як момент пари обертання  $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ :

$$\vec{v} = \vec{m}(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2). \quad (14.8)$$

Інакше кажучи, пара обертань еквівалентна поступальному (або миттєво поступальному) руху зі швидкістю  $\vec{v}$ , яка дорівнює моменту пари кутових швидкостей цих обертань.

Прикладом такого руху є поступальний рух педалі  $DE$  відносно рами велосипеда (Рис. 14.4), що є результатом переносного обертання навколо осі  $B$  і відносного обертання педалі навколо своєї осі  $A$

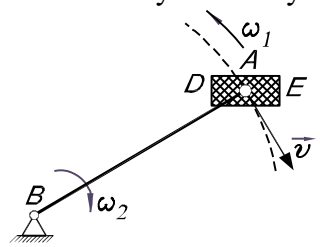


Рисунок 14.4

з рівними та протилежно напрямленими кутовими швидкостями. Швидкість поступального руху педалі  $v = \omega_2 \cdot AB$ .

Отже, в усіх випадках додавання обертань навколо паралельних осей можна провести таку аналогію з статикою: **вектори кутових швидкостей таких обертань додають як вектори паралельних сил у статиці**. Величину ж абсолютної кутової швидкості можна обчислювати за формулою

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

якщо кутові швидкості вважати алгебраїчними величинами.

## 14.2. Розрахунок планетарних і диференціальних механізмів. Формули Вілліса

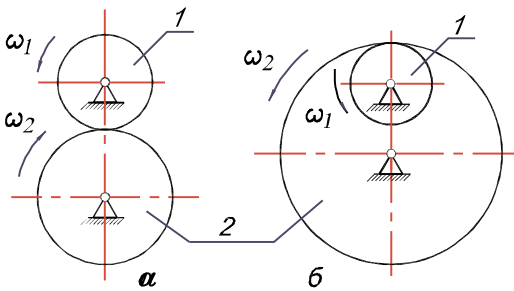


Рисунок 14.5

до уваги не тільки абсолютні величини, а й напрямки обертання, тобто розглядаючи кутові швидкості як алгебраїчні величини. Якщо врахувати, що у передачі з **зовнішнім зачепленням** (Рис. 14.5, а) колеса обертаються у різні боки і їх **кутові швидкості мають протилежні знаки**, а для передачі з **внутрішнім зачепленням** (Рис. 14.5, б) напрям обертання і знак кутових швидкостей обох коліс однаковий, можна записати

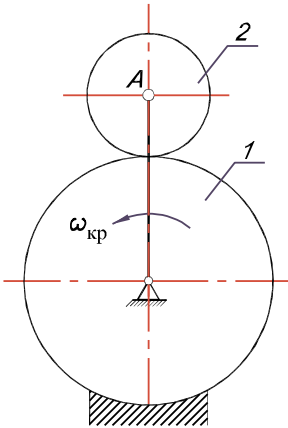
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (14.9)$$

У цій формулі  $\omega_i$  - це кутова швидкість  $i$ -го колеса (виражена у рад/с),  $n_i$  - його частота обертання (число обертів за хвилину),  $r_i$  та  $z_i$  - радіус та число зубців колеса. Для передачі з зов-

нішнім зачепленням беруть знак "мінус", а з внутрішнім зачепленням - "плюс".

Перейдемо тепер до розгляду **планетарних і диференціальних механізмів (передач)**. Такими називають механізми, які мають у своєму складі зубчасті колеса з рухомими осями. Будь-який планетарний або диференціальний механізм складається з трьох груп елементів (ланок): центральних коліс, сателітів і кривошипа (води́ла).

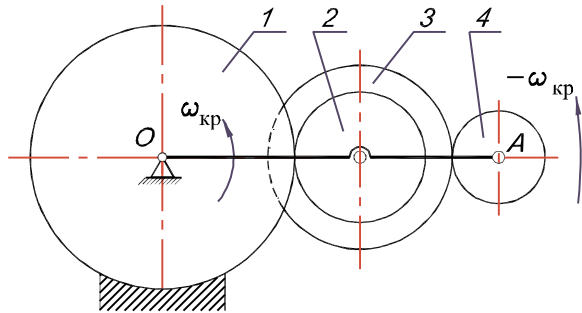
На рис. 14.6 показана найпростіша планетарна передача, в якій центральне колесо 1 закріплене нерухомо, а сателіт 2 обертається кривошипом  $OA$  навколо осі центрального колеса. На відміну від планетарного механізму у диференціальному механізмі центральне колесо теж обертається, одержуючи рух від незалежного двигуна. Планетарні і диференціальні передачі набули поширення в техніці, наприклад, завдяки тому, що вони можуть невеликою кількістю зубчастих коліс забезпечувати великі передавальні відношення.



**Рисунок 14.6**

Кінематичний розрахунок таких передач можна здійснити, наприклад, за допомогою миттєвих центрів швидкостей, або способом уявної зупинки кривошипа (**способом Вілліса**). Розглянемо застосування способу зупинки кривошипа на прикладі планетарного механізму (Рис. 14.7).

Цей спосіб полягає у тому, що умов-



**Рисунок 14.7**

но зупиняють рух кривошипа  $OA$ .

Для цього всім ланкам механізму (всьому механізму) надамо додаткового обертального руху навколо осі  $O$  з кутовою швидкістю, що дорівнює за модулем і протилежна за напрямом кутовій швидкості  $\omega_{кр}$  кривошипа.

Тоді кривошип і осі закріплених на ньому коліс стануть нерухомими ( $\omega_{кр} - \omega_{кр} = 0$ ), а весь механізм стане звичайним зубчатим механізмом з нерухомими осями (Рис. 14.8), який називають оберненим механізмом.

Кутові швидкості всіх коліс  $\tilde{\omega}_i$  в оберненому механізмі відповідно до (14.7) дорівнюватимуть різниці своїх фактичних кутових швидкостей і кутової швидкості кривошипа  $\omega_{кр}$ , тобто

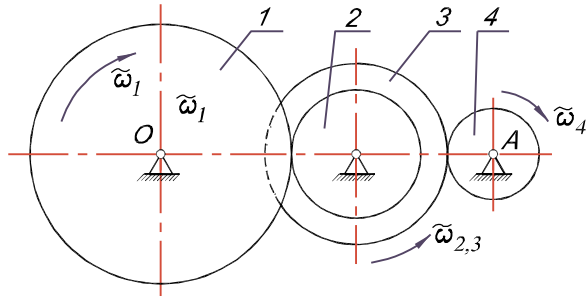


Рисунок 14.8

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_{кр}. \quad (14.10)$$

Знаючи кутові швидкості коліс, ураховуючи рівність (14.9), для звичайної зубчастої передачі (Рис. 14.8) запишемо:

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_4} = -\frac{r_4}{r_3}, \quad (14.11)$$

де 
$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3, \quad (14.12)$$

оскільки колеса 2 і 3 рухаються разом. Підставимо у формули (14.11) та (14.12) вирази (14.10) та отримаємо

$$\frac{\omega_1 - \omega_{кр}}{\omega_2 - \omega_{кр}} = -\frac{r_2}{r_1}; \quad (14.13)$$

$$\frac{\omega_3 - \omega_{\text{кр}}}{\omega_4 - \omega_{\text{кр}}} = -\frac{r_4}{r_3}; \quad (14.14)$$

$$\omega_2 - \omega_{\text{кр}} = \omega_3 - \omega_{\text{кр}}. \quad (14.15)$$

Перемножимо ліві та праві частини рівностей (14.13) і (14.14) з урахуванням (14.15). Одержимо

$$\frac{\omega_1 - \omega_{\text{кр}}}{\omega_4 - \omega_{\text{кр}}} = -\frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}. \quad (14.16)$$

Для заданого механізму в ці формули треба підставити  $\omega_1 = 0$  (шестерня 1 нерухома).

Формули (14.13), (14.14) і (14.16) називають **формулами Вілліса**. За їх допомогою можна знайти невідомі кутові швидкості. Звичайно, замість величин, які записані в формулах (14.11) – (14.15), можна, з урахуванням рівностей (14.9), використовувати інші параметри. Додамо також, що для диференціальної передачі розрахунок проводять аналогічно.

Наприклад, якщо б у заданому механізмі (Рис. 14.7) колесо 1 не було закріплене та могло обертатися з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , то всі формули залишилися б такими самими, тільки, звичайно, у формулі (14.13)  $\omega_1 \neq 0$ .

### 14.3. Додавання обертальних рухів тіла навколо осей, що перетинаються

Розглянемо приклад руху диска  $D$  (Рис. 14.9), який обертається: навколо своєї осі  $BC$  з кутовою швидкістю  $\omega_1$  і навколо осі  $AZ_1$  разом з кривошипом  $AB$  з кутовою швидкістю  $\omega_2$ . Отже, рух диска складний, оскільки він бере участь у двох обертальних рухах навколо осей, що перетинаються в точці  $O$ .

Візьмемо тепер довільний випадок такого складного руху та в точці  $O$  перетину осей  $z_1$  і  $z$  (Рис. 14.10) зобразимо вектори  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  кутових швидкостей складових рухів. Точка  $O$  тіла, що належить обом осям, залишається нерухомою під час руху тіла. Знайдемо швидкість точки  $M$  тіла, положення якої відносно точки  $O$  (відносно нерухомих осей координат, що зв'язані з точкою  $O$ ) визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$ . Зважаючи, що рух точки  $M$  складний, запишемо

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (14.17)$$

Застосовуючи формулу Ейлера для швидкостей у переносному та відносному обертальних рухах точки  $M$  навколо осей  $Oz_1$  і  $Oz$ , матимемо

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}, \quad (14.18)$$

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \quad (14.19)$$

$$\vec{v}_M = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}. \quad (14.20)$$

У площині  $Oz_1z$  обов'язково знайдеться точка  $K$  тіла, швидкість якої в дану мить дорівнює нулю. Дійсно, для точки  $K$ , що перебуває, як і точка  $M$ , у складному русі, швидкості  $\vec{v}_e$  і  $\vec{v}_r$  напрямлені в протилежні боки і їх сума дорівнює нулю, якщо вибрати відстані  $h_1$  і  $h_2$  так, щоб  $\omega_1 h_1 = \omega_2 h_2$ .

Отже, пряма  $OK$ , що проходить через нерухомі в даний момент точки  $O$  та  $K$ , є миттєвою віссю обертання тіла й абсолютний рух тіла в даний момент можна розглядати як миттєвий обертальний рух з деякою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо миттєвої

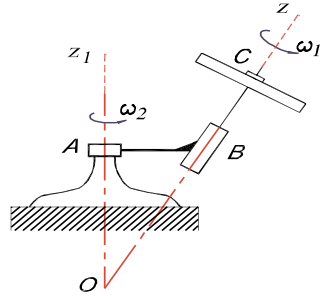


Рисунок 14.9

осі. Направимо вектор  $\vec{\omega}$  уздовж цієї осі та застосуємо знову формулу Ейлера:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (14.21)$$

Прирівнюючи праві частини формул (14.20) і (14.21), отримаємо формулу

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \quad (14.22)$$

згідно з якою побудований паралелограм кутових швидкостей (Рис. 14.10).

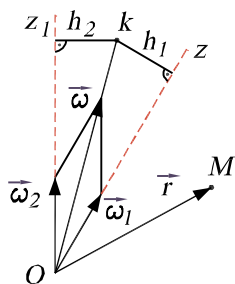


Рисунок 14.10

Таким чином, у разі додавання двох обертальних рухів тіла навколо осей, що перетинаються в деякій точці  $O$ , абсолютним рухом тіла буде обертальний рух навколо миттєвої осі, що проходить через точку  $O$ , з кутовою швидкістю, що дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей складових рухів.

**Задача 14.1.** Ведучий вал I диференціального механізму обертається з частотою  $n_1 = 1200 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$ . Знайти число обертів за

хвилину  $n_4$  веденого вала з зубчастим колесом 4, якщо зубчасте колесо 1 з внутрішнім зачепленням обертається незалежно від вала I з кутовою швидкістю  $n_1 = 3000 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$ , напрямленою у той самий бік, що і кутова швидкість вала I. Колесо 1 має  $z_1 = 180$  зубців, спарені між собою шестірні 2 і 3 мають  $z_2 = 60$  і  $z_3 = 40$  зубців, шестірня 4, розміщена на веденому валу, має  $z_4 = 80$  зубців.

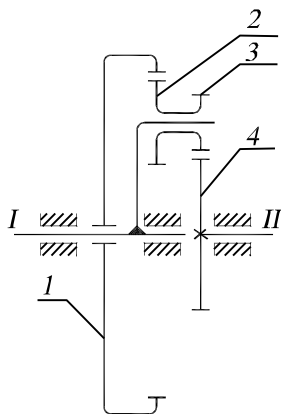


Рисунок 14.11



### Розв'язок

Цей диференціальний механізм (Рис.14.11) має два степені вільності, тобто однозначний рух усіх ланок механізму можливий за заданими незалежними рухами двох яких-небудь ланок  $(n_1, n_1)$ .

Щоб застосувати формули Вілліса, треба спочатку з'ясувати, яка ланка надає рух колесам з рухомими осями (колеса 2 і 3) і яку додаткову швидкість треба надати механізму, щоб уявно зупинити цю ланку.

У нашому прикладі такою ланкою є ведучий вал з кривошипом, на якому вільно посаженні спарені шестерні 2 і 3, і додаткова кутова швидкість дорівнює  $(-n_1)$ . Розглядаючи зачеплення коліс 1 і 2, а також 3 і 4, запишемо для них формули типу (14.13), (14.14):

$$\frac{n_1 - n_1}{n_2 - n_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{n_3 - n_1}{n_4 - n_1} = -\frac{z_4}{z_3}. \quad (14.23)$$

Зауважимо, що  $n_2 = n_3$ . Тоді, перемножуючи ліві і праві частини рівностей (14.23), отримаємо

$$\frac{n_1 - n_1}{n_4 - n_1} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}, \quad (14.24)$$

звідси

$$n_4 = n_1 \cdot \left( 1 + \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} \right) - n_1 \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = -1500 \frac{\text{об}}{\text{хв}}.$$

Знак мінус означає, що ведений вал обертається в бік, протилежний обертанню ведучого вала.

## 14.4 Рівняння сферичного руху твердого тіла. Кути Ейлера.

**Якщо тверде тіло рухається так, що одна його точка залишається весь час нерухомою, то такий рух називається обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки або сферичним рухом.**

Назва «сферичний рух» впливає з того, що траєкторії всіх точок тіла при такому русі розміщені на поверхнях сфер, із центром в нерухомій точці.

Прикладом сферичного руху тіла може бути рух гіроскопа в карданному підвісі або рух дзиги, загострений кінець якої опирається на підставку і залишається нерухомим.

При вивченні кінематики сферичного руху тіла потрібно встановити основні характеристики цього руху, тобто рівняння руху, кутові швидкість і прискорення тіла і вивести формули для обчислення швидкостей і прискорень точок тіла. Нижче розглянемо два основних методи дослідження кінематики сферичного руху: метод кутів Ейлера та метод миттєвих осей.

Як відомо, положення вільного тіла в просторі визначається трьома точками, які не лежать на одній прямій, тобто дев'ятьма координатами цих точок. Положення всіх інших точок тіла можна знайти через задані три точки. У випадку твердого тіла відстань між окремими точками тіла не змінюється, а тому координати цих трьох заданих точок повинні задовольняти трьом рівнянням, які виражають незмінність відстаней між окремими точками тіла. Тому у випадку вільного твердого тіла залишається шість незалежних координат, тобто вільне тіло має шість ступенів вільності.

У випадку сферичного руху тіла одна точка закріплена, а отже, кількість незалежних величин зменшується до трьох, тобто тіло при такому русі має три ступені вільності.

Три ступені вільності, які має тіло при сферичному русі, вимагають для визначення положення тіла відносно довільної системи координат трьох незалежних величин. Ці величини можна

задати різними способами. В теоретичній механіці найбільше застосування одержали **кути Ейлера**.

Через нерухому точку твердого тіла проведено нерухому декартову систему координат  $Ox_1y_1z_1$ , відносно якої будемо розглядати рух тіла (Рис. 14.12).

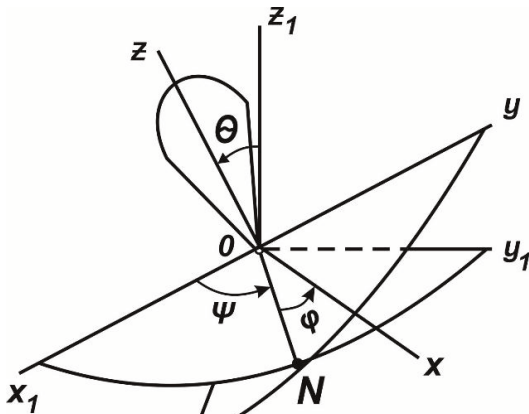


Рисунок 14.12

Рухому декартову систему координат  $Oxyz$  незмінно зв'яжемо з тілом, яке обертається навколо нерухомої точки  $O$ . Положення тіла по відношенню до нерухомої системи координат  $Ox_1y_1z_1$ , визначається положенням рухомої системи координат  $Oxyz$  по відношенню до нерухомої. Взаємне положення цих систем визначається кутами Ейлера. Лінія перетину  $ON$  нерухомої площини  $Ox_1y_1$  з рухомою  $Oxy$  називається **лінією вузлів**. Кут  $\psi$  між нерухомою віссю  $Ox_1$  і лінією вузлів  $ON$  називається **кутом прецесії**. Для зміни цього кута тіло повинно обертатися навколо осі  $Oz_1$ , яка називається **віссю прецесії**.

Кут між координатними площинами  $Ox_1y_1$  і  $Oxy$ , який вимірюється лінійним кутом  $\theta$  між осями  $Oz_1$  і  $Oz$ , називається **кутом нутації**. Лінія вузлів  $ON$ , навколо якої обертається тіло при зміні кута  $\theta$ , називається **віссю нутації**.

Кут  $\varphi$  між лінією вузлів  $ON$  і віссю  $Ox$  називається **кутом власного обертання**. Для зміни кута  $\varphi$  тіло повинно обернутися навколо осі  $Oz$ , яка носить назву **осі власного обертання**.

Кути Ейлера додатні, коли вони відкладені від осей  $Ox_1$ ,  $Oz_1$ , і  $ON$  проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з кінців відповідно вісей  $Oz_1$ ,  $ON$ ,  $Oz$  (див. рис. 14.12). При русі тіла кути  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  безперервно змінюються, тобто є функціями часу:

$$\psi = \psi(t); \quad \theta = \theta(t); \quad \varphi = \varphi(t). \quad (14.25)$$

Ці рівняння називаються **рівняннями сферичного руху тіла**.

**Зауваження.** Описаний варіант вибору кутів  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  не єдиний. Так при дослідженні динаміки кораблів і літаків використовують кути Ейлера-Крилова [14]. Корабельні кути:  $\psi$  - диферента (прецесії);  $\theta$  – рискання (нутації);  $\varphi$  – власного обертання (крену).

#### 14.5 Визначення кутової швидкості і кутового прискорення тіла за рівняннями його руху

Нехай сферичний рух тіла описується рівняннями (14.25). Обчислимо величину і напрям кутової швидкості тіла в довільний момент часу, як функцію кутів Ейлера та їх похідних.

При зміні кута  $\psi$  тіло обертається навколо осі  $Oz_1$  (прецесія) з кутовою швидкістю  $\omega_1 = \dot{\psi}$ , при зміні кута  $\theta$  – навколо лінії вузлів  $ON$  (нутація) з кутовою швидкістю  $\omega_2 = \dot{\theta}$  і при зміні кута  $\varphi$  – навколо осі  $Oz$  (власне обертання) з кутовою швидкістю  $\omega_3 = \dot{\varphi}$ . Напрями векторів  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$  показані на рисунку 14.13.

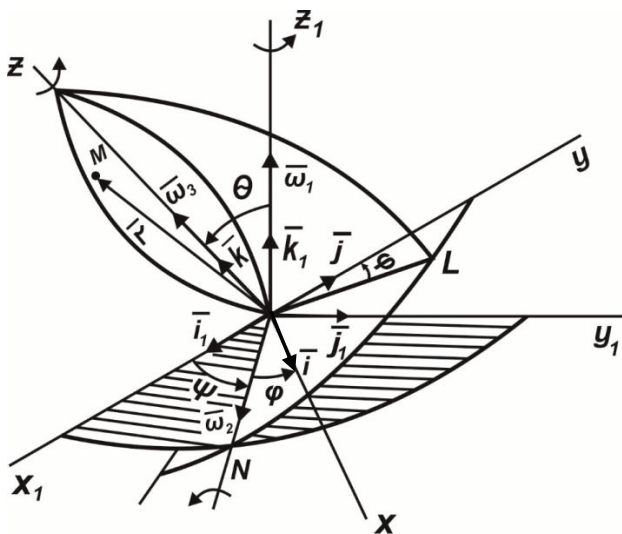


Рисунок 14.13

Як було показано в главі 14.3, при обертанні тіла навколо осей, що перетинаються, результуючий рух буде миттєво-обертальним з кутовою швидкістю, що дорівнює геометричній сумі складових кутових швидкостей. У випадку сферичного руху тіла вектор результуючої миттєвої кутової швидкості буде дорівнювати:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3. \quad (14.26)$$

Проекції вектора  $\bar{\omega}$  на осі рухомої системи координат  $Ox_1y_1z_1$  мають вид:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + \dot{\theta} \cdot \cos\varphi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi + \dot{\theta} \cdot \sin\varphi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos\theta. \end{aligned} \quad (14.27)$$

Аналогічно, проектуючи рівність (14.26) на осі нерухомої системи координат  $Ox_1y_1z_1$ , знайдемо проекції вектора  $\bar{\omega}$  на ці осі:

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \dot{\phi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi + \dot{\theta} \cdot \cos\psi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\phi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi + \dot{\theta} \cdot \sin\psi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (14.28)$$

Рівності (14.27) і (14.28) називаються **кінематичними рівняннями Ейлера**. Ці рівняння дають можливість знайти модуль миттєвої кутової швидкості і напрямні косинуси вектора  $\bar{\omega}$  з відповідними осями координат:

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 + \omega_{z_1}^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\theta}; \\ \cos \angle(\bar{\omega}, x) &= \frac{\omega_x}{\omega}; \quad \cos \angle(\bar{\omega}, y) = \frac{\omega_y}{\omega}; \quad \cos \angle(\bar{\omega}, z) = \frac{\omega_z}{\omega}; \\ \cos \angle(\bar{\omega}, x_1) &= \frac{\omega_{x_1}}{\omega}; \quad \cos \angle(\bar{\omega}, y_1) = \frac{\omega_{y_1}}{\omega}; \quad \cos \angle(\bar{\omega}, z_1) = \frac{\omega_{z_1}}{\omega}.\end{aligned}\quad (14.29)$$

Визначимо проекції вектора кутового прискорення на нерухомі осі координат  $Ox_1y_1z_1$ . Розклавши вектори швидкості  $\bar{\omega}$  і кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}$  по ортах нерухомої системи координат, отримаємо:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \bar{i}_1 \omega_{x_1} + \bar{j}_1 \omega_{y_1} + \bar{k}_1 \omega_{z_1}; \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{i}_1 \bar{\varepsilon}_{x_1} + \bar{j}_1 \bar{\varepsilon}_{y_1} + \bar{k}_1 \bar{\varepsilon}_{z_1}.\end{aligned}\quad (14.30)$$

Деференціюючи першу рівність (14.30) з урахуванням, що вектори  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  постійні за величиною і напрямом, знайдемо:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{i}_1 \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + \bar{j}_1 \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + \bar{k}_1 \frac{d\omega_{z_1}}{dt}.\quad (14.31)$$

Порівнюючи (14.31) з другою рівністю (14.30), знаходимо:

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{d\omega_{x_1}}{dt}; \varepsilon_{y_1} = \frac{d\omega_{y_1}}{dt}; \varepsilon_{z_1} = \frac{d\omega_{z_1}}{dt}. \quad (14.32)$$

Тобто проекція кутового прискорення на нерухому вісь координат дорівнює похідній по часу від проекції кутової швидкості на відповідну вісь.

Визначимо проекції кутового прискорення на рухомі вісі координат Охуз, зв'язані з твердим тілом. Одиничні вектори рухомої системи координат позначимо через  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  (Рис. 14.13). Ці орти змінюються за напрямком, тобто обертаються разом з тілом навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$ . Тому похідні по часу від цих ортів є швидкості кінців цих ортів, які визначаються за формулами (див. главу 12.3):

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \quad (14.33)$$

Розкладемо вектори  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\varepsilon}$  по ортах  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{i}\omega_x + \bar{j}\omega_y + \bar{k}\omega_z; \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{i}\bar{\varepsilon}_x + \bar{j}\bar{\varepsilon}_y + \bar{k}\bar{\varepsilon}_z. \end{aligned} \quad (14.34)$$

Беремо похідну по часу від вектора  $\bar{\omega}$ :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \left( \bar{i} \frac{d\bar{\omega}_x}{dt} + \bar{j} \frac{d\bar{\omega}_y}{dt} + \bar{k} \frac{d\bar{\omega}_z}{dt} \right) + \left( \frac{d\bar{i}}{dt} \omega_x + \frac{d\bar{j}}{dt} \omega_y + \frac{d\bar{k}}{dt} \omega_z \right);$$

Другий доданок одержаної залежності з врахуванням (14.33) перетвориться:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} \omega_x + \frac{d\bar{j}}{dt} \omega_y + \frac{d\bar{k}}{dt} \omega_z = \bar{\omega} \times (\bar{i} \omega_x + \bar{j} \omega_y + \bar{k} \omega_z) = \bar{\omega} \times \bar{\omega} = 0.$$

Кутове прискорення  $\bar{\varepsilon}$  в рухомій системі координат буде виражатися рівністю:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{i} \frac{d\omega_x}{dt} + \bar{j} \frac{d\omega_y}{dt} + \bar{k} \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (14.35)$$

Порівнюючи (14.34) і (14.35), знаходимо проекції вектора кутового прискорення на осі рухомої системи координат:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}; \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (14.36)$$

Тобто проекції  $\bar{\varepsilon}$  на рухомі осі координат (як і на нерухомі) дорівнюють похідним по часу від проекції кутової швидкості на відповідну рухому вісь.

Модуль і напрямні косинуси вектора миттєвого кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}$  знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{y_1}^2 + \varepsilon_{z_1}^2}; \\ \cos \angle(\bar{\varepsilon}, x) &= \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon}; \quad \cos \angle(\bar{\varepsilon}, y) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon}; \quad \cos \angle(\bar{\varepsilon}, z) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}; \\ \cos \angle(\bar{\varepsilon}, x) &= \frac{\varepsilon_{x_1}}{\varepsilon}; \quad \cos \angle(\bar{\varepsilon}, y_1) = \frac{\varepsilon_{y_1}}{\varepsilon}; \quad \cos \angle(\bar{\varepsilon}, z_1) = \frac{\varepsilon_{z_1}}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (14.37)$$

## 14.6 Аналітичне знаходження швидкостей точок тіла при сферичному русі. Рівняння миттєвої вісі обертання

Нехай рух тіла, що має одну нерухому точку, задано рівняннями (14.25). Знайдемо швидкість довільної точки  $M$  (Рис.14.13). Якщо координати точки  $M(x_1, y_1, z_1)$  і проекції вектора кутової швидкості  $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$  задані в нерухомій системі координат, то швидкість точки  $M$ , яка виражається відомою формулою Ейлера (11.20), може також бути представлена визначником векторного добутку:



$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \bar{i}_1(\omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1) + \bar{j}_1(\omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1) + \bar{k}_1(\omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1).$$

З іншого боку, вектор швидкості точки можна визначити через його проекції на нерухомі вісі координат:

$$\bar{v} = \bar{i}_1 v_{x_1} + \bar{j}_1 v_{y_1} + \bar{k}_1 v_{z_1}.$$

Прирівнюючи відповідні компоненти в різних представленнях вектора  $\bar{v}$ , одержимо **проекції вектора швидкості** точки тіла при сферичному русі **на осі нерухомої системи координат**:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1; \\ v_{y_1} &= \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1; \\ v_{z_1} &= \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \end{aligned} \tag{14.38}$$

Формули (14.38) носять назву **формул Ейлера**.

Якщо координати точки М і проекції вектора  $\bar{\omega}$ , задані в рухомої системі координат Охуз, то **проекції вектора швидкості на осі рухомої системи координат** будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \tag{14.39}$$

Модуль і напрямні косинуси вектора швидкості довільної точки тіла при сферичному русі знайдемо за формулами:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2}; \\ \cos \angle(\bar{v}, x) &= \frac{v_x}{v}; \quad \cos \angle(\bar{v}, y) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos \angle(\bar{v}, z) = \frac{v_z}{v}; \end{aligned}$$

$$\cos \angle(\vec{v}, x_1) = \frac{v_{x_1}}{v}; \quad \cos \angle(\vec{v}, y_1) = \frac{v_{y_1}}{v}; \quad \cos \angle(\vec{v}, z_1) = \frac{v_{z_1}}{v}. \quad (14.40)$$

За знайденими проекціями швидкостей точок тіла при сферичному русі можна знайти **рівняння миттєвій вісі обертання**.

**Швидкість кожної точки на миттєвій вісі обертання в даний момент часу дорівнює нулю, тобто**

$$v_{x_1} = v_{y_1} = v_{z_1} = 0$$

Враховуючи це, з формул (14.38) отримаємо:

$$\omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1 = 0; \quad \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1 = 0; \quad \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1 = 0$$

Звідки:

$$\frac{\omega_{y_1}}{y_1} = \frac{\omega_{z_1}}{z_1}; \quad \frac{\omega_{x_1}}{x_1} = \frac{\omega_{y_1}}{y_1}, \quad \text{або} \quad \frac{\omega_{x_1}}{x_1} = \frac{\omega_{y_1}}{y_1} = \frac{\omega_{z_1}}{z_1}. \quad (14.41)$$

Рівняння (14.41) є **рівнянням миттєвої вісі обертання тіла**, що має одну нерухому точку, в **нерухомій системі координат**. Аналогічним методом виводяться рівняння миттєвої вісі обертання в рухомій системі координат:

$$\frac{\omega_x}{x} = \frac{\omega_y}{y} = \frac{\omega_z}{z} \quad (14.42)$$

## 14.7 Знаходження швидкостей і прискорень точок тіла при сферичному русі методом миттєвих вісей.

### Теорема Ейлера – Д'Аламбера

Будь-яке елементарне переміщення тіла, що має одну нерухому точку, представляє собою елементарний поворот навколо миттєвої вісі обертання, яка проходить через цю точку.

Вісь, навколо якої потрібно обернути тіло, що має одну нерухому точку, при переміщенні його із одного положення в дру-

ге, безмежно близьке до першого, називається **миттєвою віссю обертання** для даного моменту часу.

Миттєва вісь обертання представляє собою геометричне місце точок тіла, швидкість яких в даний момент дорівнюють нулю. Положення миттєвої вісі обертання не залишається незмінним при сферичному русі тіла, а з часом змінює своє положення в просторі. Геометричне місце миттєвих вісей відносно нерухомої системи відліку, по відношенню до якої розглядається рух тіла називається **нерухомим аксоїдом**. Геометричне місце миттєвих осей в самому рухомому тілі називається **рухомим аксоїдом**.

При сферичному русі тіла рухомий аксоїд котиться без ковзання по нерухомому.

Оскільки в кожний момент часу тіло при сферичному русі має миттєву вісь обертання  $OP$ , навколо якої проходить елементарний поворот з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  (Рис.14.14), то вектор швидкості будь-якої точки  $M$  тіла буде визначатися в цей момент відомою формулою Ейлера, тобто

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (14.43)$$

де  $\bar{r}$  – радіус-вектор, проведений в точку  $M$  із нерухомої точки  $O$  (Рис.14.14).

Напрямок вектора  $\bar{v}$  швидкості точки  $M$  буде перпендикулярний площині  $POM$  і направлений в сторону миттєвого обертання тіла. Модуль вектора швидкості дорівнює

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin \angle(\bar{\omega}, \bar{r}) = \omega \cdot h_{\omega}. \quad (14.44)$$

Величина  $h_{\omega}$  – це найменша відстань від точки  $M$  до миттєвої вісі обертання  $OP$ .

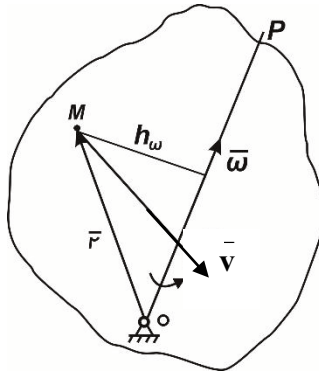


Рисунок 14.14

Для визначення прискорення довільної точки тіла при його сферичному русі вважатимемо відомими в даний момент часу кутову швидкість  $\bar{\omega}$  і кутове прискорення  $\bar{\varepsilon}$  (Рис.14.15). Прискорення точки дорівнює першій похідній по часу від вектора швидкості:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times r + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

або із врахуванням, що

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon} \text{ і } \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

отримаємо вираз для знаходження прискорення точок тіла при сферичному русі:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (14.45)$$

Тут:  $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}^{0\bar{\varepsilon}}$  обертальне прискорення точки ( $\bar{a}^{0\bar{\varepsilon}}$ );

$\bar{a}^{\omega} = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$  – доосьове прискорення точки ( $\bar{a}^{0\omega}$ ).

Таким чином

$$\bar{a} = \bar{a}^{\varepsilon} + \bar{a}^{\omega} (\bar{a} = \bar{a}^{0\bar{\varepsilon}} + \bar{a}^{0\omega}). \quad (14.46)$$

Ця рівність виражає теорему Рівальса.

**Прискорення будь-якої точки тіла при сферичному русі дорівнює геометричній сумі обертального і доосьового прискорень.**

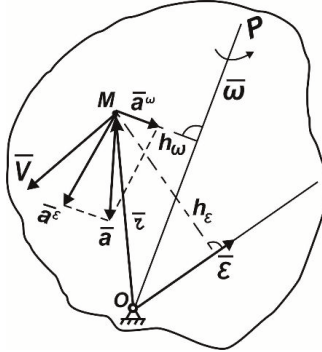


Рисунок 14.15

Вектор обертального прискорення  $\bar{a}^\omega$  направляється згідно векторного добутку, тобто перпендикулярно до площини  $\bar{r}O\bar{v}$  в ту сторону, звідки найкоротший поворот вектора  $\bar{v}$  до вектора  $\bar{r}$  видно проти ходу годинникової стрілки. Модуль обертального прискорення:

$$a^\omega = \varepsilon \cdot r \cdot \sin \angle(\bar{v}, \bar{r}) = \varepsilon \cdot h_\varepsilon, \quad (14.47)$$

де  $h_\varepsilon$  – відстань від точки М до прямої, вздовж якої спрямований вектор  $\bar{v}$ . Вектор доосьового прискорення  $\bar{a}^\omega$  направляється перпендикулярно до векторів  $\bar{v}$  і  $\bar{v}$ , тобто вздовж перпендикуляра, опущеного з точки М на миттєву вісь  $OP$  (Рис. 14.15). Модуль доосьового прискорення:

$$a^\omega = \omega \cdot v \cdot \sin \angle(\bar{v}, \bar{v}) = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h_\omega. \quad (14.48)$$

Модуль повного прискорення  $\bar{a}$  обчислюється як діагональ паралелограма за формулою:

$$a = \sqrt{(a^e)^2 + (a^\omega)^2 + 2a^e \cdot a^\omega \cdot \cos \angle(\bar{a}^e, \bar{a}^\omega)}. \quad (14.49)$$

### 14.8 Рух вільного твердого тіла. Рівняння руху.

Як було показано в розділі 14.4, вільне тверде тіло має шість ступенів вільності, тобто рух вільного тіла описується шістьма незалежними параметрами (координатами) по відношенню до нерухомої системи відліку.

В загальному випадку для визначення положення вільного тіла відносно нерухомої системи координат  $\tilde{O}x_1 y_1 z_1$  достатньо задати відносно цієї системи координат положення другої системи координат  $Ox'_1 y'_1 z'_1$ , яка рухається поступально відносно неї разом з довільною точкою  $O$  тіла, і кути Ейлера, що визначають положення системи координат  $Oxyz$  жорстко зв'язаної з рухомим тілом, відносно системи координат  $Ox'_1 y'_1 z'_1$  (Рис.14.16).

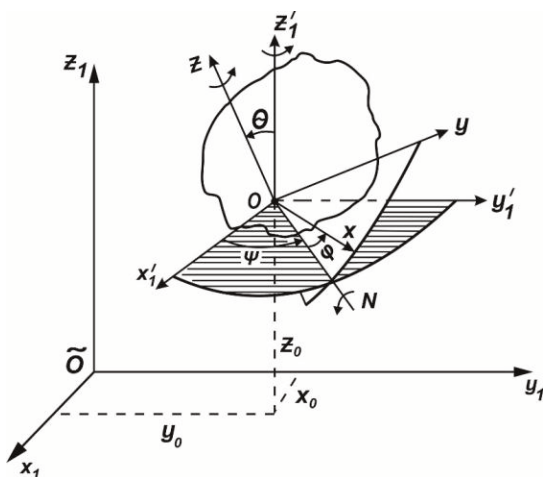


Рисунок 14.16

Таким чином, положення вільного твердого тіла в просторі буде відомо, якщо будуть задані шість узагальнених координат

$x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi$ . При русі тіла всі ці координати неперервно змінюються, тобто є функціями часу:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1(t); & y_0 &= y_1(t); & z_0 &= z_1(t); \\ \psi &= \psi(t); & \theta &= \theta(t); & \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \quad (14.50)$$

Рівняння (14.50) є **кінематичними рівняннями руху вільного твердого тіла**. Перші три рівняння системи (14.50) описують поступальну складову руху тіла, а три наступні – сферичну складову руху тіла.

Зауважимо, що перші три рівняння, які описують поступальну складову руху, залежать від вибору полюса (точка  $O$  в тілі), а рівняння, які описують сферичну складову руху, не залежать від вибору полюса  $O$ .

## 14.9 Швидкості точок вільного твердого тіла

**Теорема.** Швидкість довільної точки вільного твердого тіла дорівнює векторній сумі швидкості полюса і обертальної швидкості цієї точки в сферичному русі тіла навколо полюса.

**Доведення.** Для доведення теореми визначимо швидкість довільної точки  $M$ . За полюс приймемо точку  $O$ , швидкість якої  $\vec{v}_O$  відома (Рис.14.17).

Позначимо радіуси-вектори точок  $O$  і  $M$  відносно нерухомої точки  $\tilde{O}$  відповідно через  $\vec{\rho}_O$  і  $\vec{\rho}_M$ , а через  $\vec{r}$  – вектор  $\overline{OM}$ . Під час руху тіла між цими радіусами-векторами зберігається залежність:

$$\vec{\rho}_M = \vec{\rho}_O + \vec{r},$$

де  $\vec{r} = \text{const}$ , як віддаль між точками одного твердого тіла.

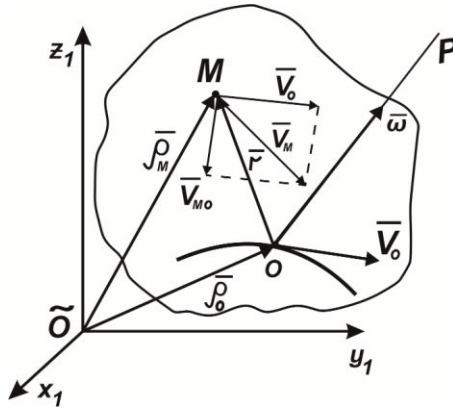


Рисунок 14.17

**Вектор швидкості точки М**  $\vec{v}_M = \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

Похідна  $\frac{d\vec{\rho}_O}{dt} = \vec{v}_O$  – це швидкість точки  $O$ , яку ми вибрали за полюс.

Оскільки при русі тіла модуль радіуса-вектора  $\vec{r}$  залишається незмінним, а напрям його змінюється при обертанні тіла навколо полюса  $O$ , то похідна  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  представляє собою обертальну швидкість точки  $M$  в сферичному русі тіла навколо полюса  $O$ , тобто

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Тому

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} \quad (14.51)$$

або

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (14.52)$$

Теорема доведена.



## 14.10 Прискорення точок вільного твердого тіла

**Теорема.** Прискорення довільної точки вільного твердого тіла дорівнює векторній сумі прискорення полюса, обертального і доосьового прискорень цієї точки в сферичному русі тіла навколо полюса.

**Доведення.** Нехай відомі прискорення  $\bar{a}_O$  точки  $O$ , яку приймемо за полюс, кутова швидкість  $\bar{\omega}$  тіла навколо миттєвої осі і його кутове прискорення  $\bar{\varepsilon}$  (Рис.14.18).

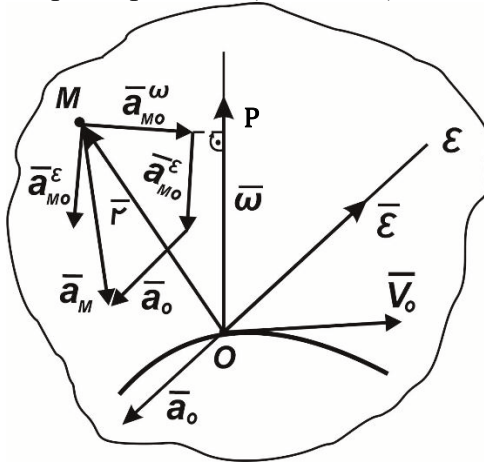


Рисунок 14.18

Для доведення теореми визначимо прискорення довільної точки  $M$ , швидкість якої згідно з формулою (14.52) дорівнює

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Прискорення точки  $M$  знайдемо як похідну по часу від вектора  $\bar{v}_M$ .

$$\bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Тут:  $\frac{d\bar{v}_O}{dt} = \bar{a}_O$  прискорення полюса  $O$ ;

$\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_{MO}^\varepsilon$  – обертальне прискорення точки  $M$  відносно осі кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}$ , що проходять через полюс  $O$ ;

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{MO} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_{MO}^\omega.$$

– доосьове прискорення точки  $M$  відносно миттєвої осі обертання  $OP$ , що проходить через полюс  $O$ .

Тому

$$\bar{a}_M = \bar{a}_O + \bar{a}_{MO}^\varepsilon + \bar{a}_{MO}^\omega. \quad (14.53)$$

Теорема доведена.

У формулі (14.53) складові прискорень  $\bar{a}_{MO}^\varepsilon$  і  $\bar{a}_{MO}^\omega$  обумовлені сферичним рухом вільного тіла навколо полюса  $O$ . Характеристики цих складових прискорень, їх величини і напрям описані в параграфі 14.7. На рис 14.18 показані всі складові прискорення точки  $M$  при вільному русі тіла.

#### Приклад 14.2

Конус з кутом при вершині  $2\alpha$  і висотою  $OC = h$  (Рис.14.19) котиться по нерухомій горизонтальній площині без ковзання так, що його вершина  $O$  залишається нерухомою, а центр основи рухається з постійною швидкістю  $\bar{v}_C$ . Визначити швидкість і прискорення точки  $B$  – кінця діаметра  $AB$  основи конуса.

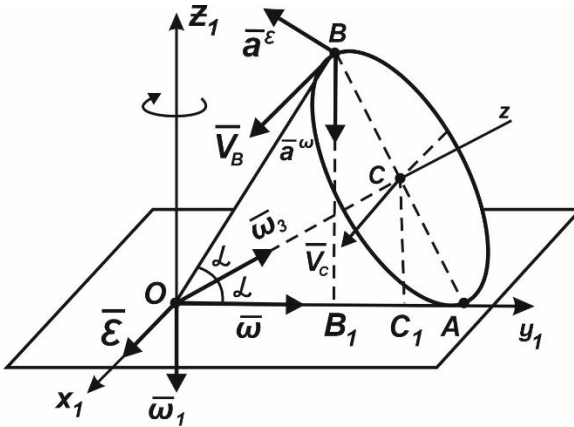


Рисунок 14.19

**Розв'язання.** З горизонтальною площиною зв'яжемо нерухому систему координат  $Ox_1y_1z_1$ , з висотою конуса – рухому вісь  $Oz$ . Миттєва вісь обертання, усі точки якої у даний момент часу мають нульову швидкість, збігається з твірною конуса  $OA$  (вісь  $Oy_1$ ). На цій осі лежить вектор  $\bar{w}$ . Вісь  $Oz_1$ , є віссю прецесії, на цій осі лежить вектор  $\bar{w}_1$ . Вісь  $Oz$  – вісь власного обертання, на неї лежить вектор  $\bar{w}_3$ . Бічна поверхня конуса – рухомий аксоїд, а площина  $x_1Oy_1$  – нерухомий аксоїд.

Так як швидкості точок тіла пропорційні їх віддалям до миттєвої осі обертання  $Oy_1$ , то

$$\frac{v_B}{BB_1} = \frac{v_C}{CC_1} \text{ і } v_B = 2v_C \quad (\bar{v}_B \parallel \bar{v}_C).$$

Для визначення  $\bar{a}_B$  треба знайти  $\bar{w}$  і  $\bar{\epsilon}$ . Вектор  $\bar{w}$  спрямован вздовж осі  $Oy_1$  і по модулю

$$\omega = \frac{v_C}{CC_1} = \frac{v_C}{h \sin \alpha}.$$

Оскільки  $\omega = \text{const}$ , то вектор  $\bar{\omega}$  змінюється тільки по напрямку, обертаючись навколо осі  $Ox_1$ , з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}_1$ . Тоді:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}.$$

Вектор  $\bar{\varepsilon}$  спрямован вздовж осі  $Ox_1$  (до нас). Враховуючи, що  $\bar{\omega}_1 \perp \bar{\omega}$  і по модулю:

$$\omega_1 = \frac{v_c}{CC_1} = \frac{v_c}{h \cos \alpha}$$

отримаємо:

$$\varepsilon = \omega_1 \times \omega = \frac{2v_c^2}{h^2 \cdot \sin 2\alpha}.$$

Згідно з теоремою Рівальса, прискорення точки В визначається за формулою (14.46):

$$\bar{a} = \bar{a}^\varepsilon + \bar{a}^\omega, \quad (14.46)$$

де вектор  $\bar{a}^\varepsilon = \bar{\varepsilon} \times \overline{OB}$  напрямлен перпендикулярно до  $OB$ , а вектор  $\bar{a}^\omega = \omega^2 \cdot \overline{BB_1}$  – перпендикулярний до  $OA$ . По модулю:

$$a^\varepsilon = \varepsilon \cdot OB = \frac{2v_c^2}{h \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha};$$

$$a^\omega = \omega^2 \cdot 2 \cdot CC_1 = \frac{2v_c^2}{h \cdot \sin 2\alpha}.$$

Вектори  $\bar{a}^\varepsilon$  і  $\bar{a}^\omega$  лежать в площині  $OAB$  і кут між ними дорівнює  $180^\circ - 2\alpha$ , тому

$$a = \sqrt{(a^\varepsilon)^2 + (a^\omega)^2 - 2a^\varepsilon \cdot a^\omega \cos 2\alpha}.$$

### Контрольні запитання

1. Який рух тіла називають складним рухом?
2. Що називають миттєвою віссю обертання?
3. Де проходить миттєва вісь обертання при додаванні двох обертальних рухів навколо паралельних осей?
4. Як проходить миттєва вісь обертання твердого тіла, при додаванні двох обертальних рухів навколо осей, які перетинаються?
5. Як визначається кутова швидкість обертання тіла навколо миттєвої осі?
6. Що таке пара обертань?
7. Який механізм називають оберненим?
8. Записати формули Вілліса.
9. В якому зачепленні зубчастих коліс (внутрішньому або зовнішньому) змінюється напрямок обертання веденої ланки на протилежний?
10. Дайте визначення планетарного і диференціального механізмів. Яка у них відмінність?
11. З яких елементів (ланок) складається планетарний та диференціальний механізми?
12. Що таке передаточне число?
13. Дайте означення сферичного руху твердого тіла.
14. Які основні кінематичні характеристики руху твердого тіла з нерухою точкою?
15. Як визначити вісь миттєвого обертання тіла з нерухою точкою в рухомій і нерухомій системах координат?
16. Що таке рухомий та нерухомий аксоїд?
17. Як визначити швидкості точок тіла при сферичному русі?

18. Як визначити прискорення точок тіла при сферичному русі?
19. Теорема Ейлера – Д'Аламбера.
20. Скільки ступенів вільності має тіло при сферичному русі?
21. Скільки ступенів вільності має вільне тверде тіло?
22. Кінематичні рівняння сферичного руху тіла.
23. Кінематичні рівняння руху вільного твердого тіла.
24. Теорема про швидкості точок вільного твердого тіла.
25. Теорема про прискорення точок вільного твердого тіла.
26. Чи дорівнюють нулю прискорення точок миттєвої осі обертання тіла?
27. Як залежать кінематичні рівняння руху вільного твердого тіла від вибору полюса?
28. Яка послідовність і назва кутів Ейлера?
29. Чому дорівнюють швидкості точок тіла на миттєвої осі обертання?

## РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА

### Глава 15. Динаміка точки

#### 15.1. Основні поняття та закони динаміки

Динаміка – це розділ механіки, в якому вивчають механічний рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що діють на ці об'єкти.

Уперше термін "Динаміка" ввів німецький математик Г. Лейбніц. Основними поняттями динаміки є: матеріальна точка, сила, маса, абсолютно тверде тіло.

**Маса** – це фізична величина, яка є мірою інертних і гравітаційних властивостей тіла або точки.

Сили в динаміці поділяють на сталі та змінні. У загальному випадку будемо вважати, що сила є функцією часу, радіуса-вектора та швидкості матеріальної точки, до якої вона прикладаєна, тобто:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}). \quad (15.1)$$

Через те, що різні точки тіла можуть рухатися неоднаково, деякі положення та висновки потрібно застосувати тільки для окремих матеріальних точок, а не для всього тіла. Тому динаміку поділяють на дві частини: динаміка матеріальної точки та динаміка матеріальної системи.

Коли розміри тіл малі порівняно з траєкторіями, що описуються цими тілами, їх можна розглядати як точки, наприклад, рух планет Сонячної системи.

Закони динаміки точки можна застосовувати до тіл, що рухаються поступально, коли потрібно визначити рух тіла загалом, а не його окремих точок.

В основу динаміки покладено закони динаміки точки, які встановлені шляхом узагальнення результатів цілого ряду експериментів і спостережень, присвячених вивченню руху тіл, та перевірі їх практикою. Ці закони вперше були сформульовані Г. Галілеєм та І. Ньютоном у XVII столітті та викладені в кла-

сичному творі Ньютона "Математичні начала натуральної філософії" (1687 р.).

**Закон I (закон інерції).** Матеріальна точка перебуває в стані спокою, або рухається рівномірно та прямолінійно, якщо на неї не діють ніякі сили, або діє система взаємно зрівноважених сил.

Перший закон (відкритий Г.Галілеєм в 1638 р.) виражає критерій наявності системи відліку, в якій можна розглядати рух матеріальних тіл.

**Інерціальною системою відліку називають систему відліку, в якій справджується закон інерції.**

У класичній механіці допускається існування інерціальної системи відліку. Слід зазначити, що неможливо виділити абсолютно інерціальну систему відліку. Проте її існування з певною достовірністю підтверджується експериментально. Для вивчення руху тіл на Землі як інерціальну можна прийняти геоцентричну систему відліку, що незмінно пов'язана з Землею. Похибка, яка вноситься при цьому, невелика.

Інерціальну систему відліку будемо ще називати умовно нерухомою.

**Закон II (другий закон Ньютона).** Зміна кількості руху пропорційна прикладеній силі та проходить у напрямі прямої, по якій діє ця сила.

Кількість руху – це міра механічного руху, яка для матеріальної точки дорівнює добутку її маси  $m$  на швидкість  $\vec{v}$ . Тому математично другий закон Ньютона виражається такою рівністю

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (15.2)$$

Якщо маса матеріальної точки не залежить від часу, тоді

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

і рівність (15.2) запишемо у вигляді

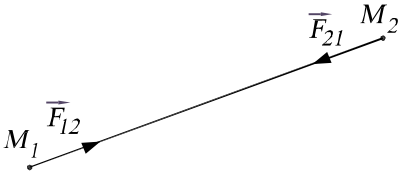


$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (15.3)$$

де  $\vec{a}$  – прискорення, яке набуває точка від дії сили  $\vec{F}$ .

Другий закон Ньютона має місце тільки в інерціальній системі відліку. Рівняння (15.3) – основне рівняння динаміки точки.

**Закон III (закон рівності дії та протидії).** Сили взаємодії



двох матеріальних точок однакові за величиною та протилежні за напрямком (Рис. 15.1), тобто:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (15.4)$$

**Рисунок 15.1**

Цей закон називають третім законом Ньютона.

Підкреслимо, що із рівності дії та протидії та протилежності сил за напрямком зовсім не впливає їх взаємна рівновага, бо ці сили прикладені до різних тіл.

**Закон IV (принцип незалежності дій сил).** Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії на неї водночас декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які точка отримує від дії кожної сили зокрема.

Це значить, що у разі дії на матеріальну точку водночас декількох сил  $\vec{F}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) допускається справедливість рівності

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (15.5)$$

Рівняння (15.5) – це основне рівняння динаміки вільної матеріальної точки. Це рівняння є справедливим і для невилітної матеріальної точки, на яку накладені в'язі. Потрібно тільки до прикладених сил додати реакції в'язей, тобто:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k, \quad (15.6)$$

де  $\vec{R}_k$  – реакція  $k$ -ої в'язі. Рівняння (15.6) – основне рівняння динаміки невідільної матеріальної точки.

## 15.2. Задачі динаміки точки

У динаміці розв'язують дві основні задачі. Сформулюємо ці задачі для вільної точки. **Перша або пряма задача динаміки:** за відомими законом руху точки та її масою, встановити, під дією яких сил відбувається цей рух. **Друга (основна) задача** – обернена задача динаміки: за відомими масою точки та силами, які діють на неї, а також початковими умовами (початкове положення та початкова швидкість), визначити закон руху точки.

Для невідільної точки дві основні задачі динаміки є такими: **перша задача** – за відомими законом руху точки, активними силами, які діють на неї, а також її масою, визначити рівнодійну реакцій в'язей; **друга (основна) задача** – за відомими активними силами, які діють на точку, її масою, а також початковими умовами, визначити закон руху точки та реакції в'язей.

**Задача 15.1.** Повітряна куля та корзина загальною вагою  $\vec{G}$  опускаються з прискоренням  $\vec{a}$ . Якої ваги  $\vec{Q}$  вантаж необхідно скинути, щоб куля почала підніматися з таким самим прискоренням?

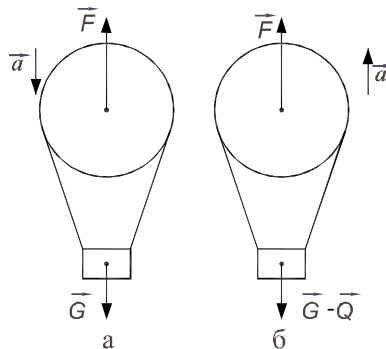


Рисунок 15.2

### Розв'язок

На кулю, що опускається, діє сила ваги  $\vec{G}$  та підймальна сила  $\vec{F}$  (Рис. 15.2, а) Запишемо рівняння руху кулі в проекціях на вертикаль

$$\frac{G}{g}a = G - F.$$

Коли вантаж скинути (Рис. 15.2, б), то вага кулі дорівнюватиме  $G - Q$ , а підймальна сила залишиться тією ж. Враховуючи, що куля при цьому буде рухатися угору, отримаємо:

$$\frac{G - Q}{g}a = F - (G - Q).$$

Виключаючи з цих двох рівнянь невідому силу  $F$ , знайдемо:

$$Q = \frac{2Ga}{a + g}.$$

### 15.3. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

З кінематики відомо, що рух матеріальної точки в просторі можна описати трьома способами: векторним, координатним і натуральним. Кожному із цих способів відповідають диференціальні рівняння руху матеріальної точки, які встановлюють на підставі основного рівняння динаміки точки (15.5) або (15.6).

Якщо рух матеріальної точки масою  $m$  описують **векторним способом**, тобто її положення в просторі визначається радіусом-вектором  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , то диференціальне рівняння руху цієї точки має вигляд:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}), \quad (15.7)$$

де  $\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$  – рівнодійна сил, що діють на точку

(Рис. 15.3).

Рівняння (15.7) називають **диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі**.

Якщо рух матеріальної точки масою  $m$  описують **координатним способом**, тобто її положення в просторі визначається координатами  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ ,  $z = f_3(t)$ , то диференціальні рівняння руху цієї точки мають вигляд:

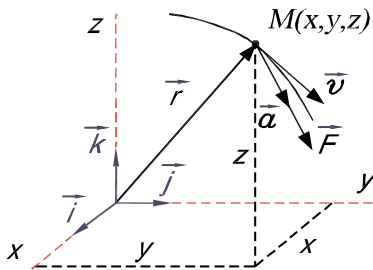


Рисунок 15.3

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

де  $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ ,  $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ,  $\vec{a}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ .

Рівняння (15.8) називають **диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в координатній (декартовій) формі**.

Якщо рух матеріальної точки масою  $m$  описують **натуральним способом** (Рис. 15.4), тобто її положення на траєкторії визначається дуговою коор-

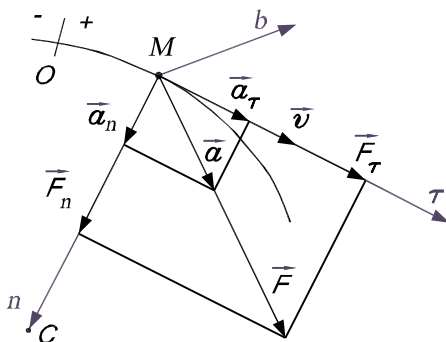


Рисунок 15.4

динатою  $s = s(t)$ , то диференціальні рівняння руху цієї точки в проєкціях на осі натурального тригранника  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} ma_{\tau} &= F_{\tau}(t, s, \dot{s}); & m \frac{dv}{dt} &= F_{\tau}(t, s, \dot{s}); \\ ma_n &= F_n(t, s, \dot{s}); & m \frac{v^2}{\rho} &= F_n(t, s, \dot{s}); \\ ma_b &= F_b(t, s, \dot{s}); & 0 &= F_b(t, s, \dot{s}), \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

де  $v = \dot{s}$ ,  $\rho$  – радіус кривизни траєкторії в точці  $M$ ,  $C$  – центр кривизни траєкторії;  $a_b = 0$  - проєкція  $\vec{a}$  на бінормаль.

Рівняння (15.9) називають **диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в натуральній формі або формі Ейлера**.

#### 15.4. Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки (розв'язування другої задачі динаміки)

Наведемо алгоритм розв'язування другої задачі динаміки, використовуючи рівняння руху матеріальної точки в координатній формі (15.8).

Установлення закону руху точки в цьому разі зводять до інтегрування системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку (15.8), в яких невідомими функціями є координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а аргументом є час  $t$ . Проінтегрувавши систему диференціальних рівнянь, одержимо шукані величини як функції часу та шести довільних сталих  $C_k$  (загальний розв'язок):

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{15.10}$$

Для визначення довільних сталих  $C_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, 6$ ) необхідно задати **початкові умови**: початкове положення та початкову швидкість точки в момент часу  $t = t_0$ . Як правило, початковий момент часу приймають за нульовий, тобто  $t_0 = 0$ . Початкові умови можна задати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned}x(0) &= x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0; \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0.\end{aligned} \right\}\tag{15.11}$$

Після диференціювання за часом рівнянь (15.10), отримаємо:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{15.12}$$

Підставляючи в (15.12) і (15.10) початкові умови (15.11), отримаємо систему шести алгебраїчних рівнянь відносно шести невідомих  $C_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, 6$ )

$$\left. \begin{aligned}x_0 &= x(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ y_0 &= y(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ z_0 &= z(0, C_1, C_2, \dots, C_6)\end{aligned} \right\} \cup \left\{ \begin{aligned}\dot{x}_0 &= \dot{x}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ \dot{y}_0 &= \dot{y}(0, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ \dot{z}_0 &= \dot{z}(0, C_1, C_2, \dots, C_6)\end{aligned} \right\}.\tag{15.13}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (15.13), визначимо шість невідомих сталих  $C_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, 6$ ). Після підстановки цих сталих у співвідношення (15.10) матимемо частковий розв'язок задачі відповідно до початкових умов (15.11), тобто визначим шуканий закон руху точки:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \right\} \quad (15.14)$$

### 15.5. Інтегрування диференціальних рівнянь прямолінійного руху точки

**На точку діє постійна за модулем і напрямком сила**

На точку масою  $m$  діє постійна за модулем і напрямком сила  $\vec{Q}$ . Диференціальне рівняння прямолінійного руху точки вздовж осі  $Ox$  матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx},$$

або

$$m\ddot{x} = Q_x. \quad (15.15)$$

Оскільки  $Q_x = \text{const}$ , то помноживши обидві частини рівняння (15.15) на  $dt$  і проінтегрувавши, одержимо

$$\dot{x} = v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{Q_x}{m}t + C_1. \quad (15.16)$$

Помноживши обидві частини рівняння (15.16) на  $dt$  і ще раз проінтегрувавши, знайдемо загальний розв'язок рівняння (15.15):

$$x = \frac{1}{2} \frac{Q_x}{m} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (15.17)$$

Для визначення сталих інтегрування у випадку прямолінійного руху точки початкові умови задають у вигляді:

$$\text{при } t = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = v_{0x} = \dot{x}_0. \quad (15.18)$$

Підставивши в рівняння (15.16) і (15.17) початкові умови (15.18), отримаємо:

$$C_1 = \dot{x}_0, \quad C_2 = x_0.$$

Після підстановки цих значень в (15.17) маємо **закон руху**

## ТОЧКИ

$$x = \frac{1}{2} \frac{Q_x}{m} t^2 + \dot{x}_0 t + x_0.$$

### На точку діє сила, залежна від часу

Точка масою  $m$  розпочинає рух зі стану спокою вздовж гладкої горизонтальної площини під дією сили  $\vec{R}$ , що змінюється за законом  $R = kt$ . Потрібно визначити закон руху точки.

Відлік осі  $x$  розпочнемо з початкового положення точки та направимо цю вісь у бік руху (Рис. 15.5).

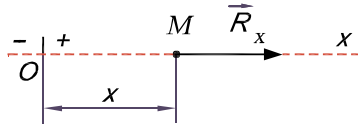


Рисунок 15.5

Тоді початкові умови: при  $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_{0x} = 0$ . На рисунку покажемо в довільному положенні точку і силу  $R_x = kt$ , що діє

на неї.

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = kt.$$

Двічі проінтегрувавши рівняння руху, отримаємо:

$$m\dot{x} = \frac{kt^2}{2} + C_1, \quad mx = \frac{kt^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

Підставивши початкові умови, знайдемо  $C_1 = C_2 = 0$ .

Тоді закон руху точки запишемо так:

$$x = \frac{k}{6} t^3 \cdot \frac{1}{m}.$$

### На точку діє сила, що залежить від переміщення

Визначити закон руху точки масою  $m$ , на яку діє сила  $\vec{F}$  прямо пропорційна переміщенню  $x$  ( $F_x = -\alpha x$ ) (Рис. 15.6).

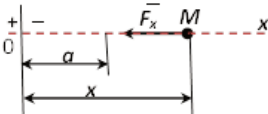


Рисунок 15.6



Початкові умови задачі: при  $t = 0$ ,  $x = a$ ,  $\dot{x}_0 = v_{0x} = 0$ .

Диференціальне рівняння руху точки в цьому разі має вигляд:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -ax, \\ \text{або} \quad \ddot{x} &= -k^2 x, \end{aligned} \quad (15.19)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{\alpha}{m}.$$

Перепишемо рівняння (15.19) так :

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -k^2 x.$$

Помноживши обидві частини отриманого виразу на  $dx$  і розділивши змінні, отримаємо:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -k^2 \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Використовуючи початкові умови, визначимо сталу інтегрування

$$C_1 = \frac{1}{2} k^2 a^2.$$

$$\text{Тоді} \quad \dot{x} = \pm k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Уважаючи, що швидкість руху направлена від точки  $M$  до  $O$ , перед коренем беремо знак мінус. Тоді, замінивши  $\dot{x}$  на  $\frac{dx}{dt}$ , отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Розділивши змінні, зведемо рівняння до вигляду

$$k dt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (15.20)$$

Після інтегрування (15.19) маємо

$$kt = \arccos \frac{x}{a} + C_2.$$

Підставивши початкові умови ( $t = 0, x = a$ ) в отриманий вираз, знайдемо сталу інтегрування:  $C_2 = 0$ . Визначивши з останнього виразу  $x$ , запишемо **закон руху точки** у вигляді:

$$x = a \cos(kt) = a \cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}} t\right).$$

### На точку діє сила, що залежить від швидкості

Матеріальна точка масою  $m$  розпочинає рух по шорсткій лінії з початковою швидкістю  $\vec{v}_0$ . Уважаючи силу тертя залежною від швидкості  $\vec{R} = -\mu \vec{v}$ , визначити, через який час швидкість точки зменшиться в два рази.

Сумістимо початок осі  $Ox$  з початковим положенням точки та направимо цю вісь у бік руху точки (Рис. 15.7).

Визначимо проєкції на вісь  $x$  сил, що діють на точку,

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -R = -\mu v_x = -\mu \dot{x}.$$

Для визначення часу руху точки складемо диференціальне рівняння (ураховуючи, що  $v_x = \dot{x} = v$ )

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu v.$$

Розділимо змінні та інтегруємо це рівняння:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} \int_0^t dt,$$

або 
$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m} t.$$

Звідси 
$$t = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{v}.$$

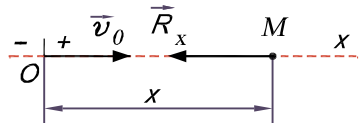


Рисунок 15.7

Час  $t$ , за який швидкість зменшиться в два рази ( $v = 0,5v_0$ ), дорівнює

$$t = 0,69 \frac{m}{\mu}, \text{ с,}$$

де враховано, що  $\ln \frac{v_0}{v} = \ln \frac{v_0}{0,5v_0} = \ln 2 = 0,69$ .

### Контрольні запитання

1. Що вивчає динаміка?
2. Сформулюйте закони Ньютона.
3. Запишіть диференціальні рівняння руху матеріальної точки для випадків задання руху у векторній, координатній та натуральній формах.
4. Наведіть алгоритм розв'язування другої задачі у випадку задання руху в координатній формі.
5. Виконайте інтегрування диференціальних рівнянь прямолінійного руху точки у разі дії на точку сили: постійної за модулем і напрямком; залежної від часу; залежної від переміщення; залежної від швидкості.

## Глава 16. Прямолінійні коливання точки

Теорія коливань є основою ряду областей фізики та техніки. Хоча коливання, які розглядають у механіці, радіотехніці, акустиці, і відрізняються одні від інших за своєю фізичною природою, основні закони цих коливань в усіх випадках є однаковими. Тому вивчення механічних коливань важливе не лише тому, що такі коливання мають місце в техніці, але і тому, що результати, отримані під час вивчення механічних коливань, можуть бути використані для вивчення коливних явищ в інших галузях знань.

### 16.1. Вільні коливання точки без урахування опору

Розглянемо рух матеріальної точки  $M$  під дією відновлювальної сили  $\vec{F}$ .

**Лінійною відновлювальною силою називають силу, яка намагається повернути точку в положення рівноваги та пропорційна відхиленню цієї точки від положення рівноваги**

$$\vec{F} = -c\vec{r}, \quad (16.1)$$

де  $c$  – коефіцієнт жорсткості, що чисельно дорівнює силі, яку необхідно прикласти до пружного елемента, щоб змінити його довжину на одиницю.

Знайдемо закон руху точки  $M$ . Для цього запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь  $Ox$  (Рис. 16.1)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x. \quad (16.2)$$

З урахуванням того, що

$$F_x = -cx,$$

рівняння (16.2) запишемо у вигляді

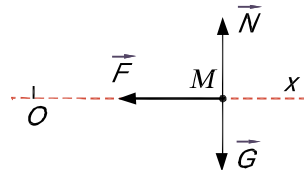


Рисунок 16.1

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Поділимо обидві частини отриманого виразу на  $m$  і отримаємо

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x. \quad (16.3)$$

Уведемо позначення  $k^2 = \frac{c}{m}$ . Тоді рівняння (16.3) можна записати так

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (16.4)$$

Рівняння (16.4) є **диференціальним рівнянням вільних коливань за відсутності опору**. Розв'язок цього лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку будемо шукати у вигляді  $x = e^{nt}$ . Після підстановки цього виразу в (16.4) отримаємо для визначення  $n$  таке характеристичне рівняння:

$$n^2 + k^2 = 0.$$

Оскільки корені цього характеристичного рівняння уявні  $n_{1,2} = \pm ik$ , то, виходячи з теорії диференціальних рівнянь, загальний розв'язок рівняння (16.4) має вигляд:

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt), \quad (16.5)$$

де  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування.

Якщо ввести нові сталі  $a$  та  $\alpha$ , такі, що  $C_1 = a \sin \alpha$ ,  $C_2 = a \cos \alpha$ , то отримаємо:

$$x = a(\sin kt \cdot \cos \alpha + \cos kt \cdot \sin \alpha)$$

$$\text{або} \quad x = a \sin(kt + \alpha). \quad (16.6)$$

Це другий вигляд розв'язку рівняння (16.4), в якому сталі інтегрування  $a$  та  $\alpha$ . Тоді швидкість точки така:

$$v_x = ak \cos(kt + \alpha). \quad (16.7)$$

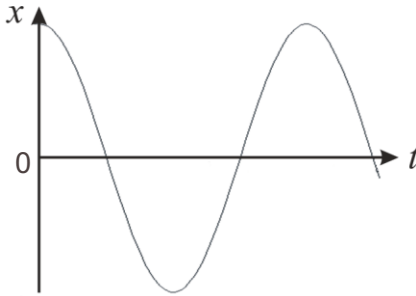


Рисунок 16.2

цію (Рис. 16.3). Розглянемо точку  $B$ , що рухається по дузі кола радіуса  $a$  з положення  $B_0$ , що визначається кутом  $\angle DOB_0 = \alpha$ . Стала кутова швидкість обертання радіуса  $OB$  дорівнює  $k$ .

Тоді в довільний момент часу  $t$  кут  $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$  і проекція  $M$  точки  $B$  на діаметр, перпендикулярний до  $DO$ , рухається відповідно до закону  $x = a \sin(kt + \alpha)$ , де  $a = OM$ .

Величину  $a$ , що дорівнює найбільшому відхиленню точки  $M$  від центра коливань, називають **амплітудою коливань**. Величину  $\varphi = \alpha + kt$  називають **фазою коливань**. Фаза  $\varphi$ , на відміну від координати  $x$ , визначає не лише положення точки в даний момент часу, але й напрямок її руху. Наприклад, з положення  $M$  для фази  $\varphi$  точка рухається вправо, а для фази  $(\pi - \varphi)$  – вліво,  $\alpha$  – **початкова фаза коливань**. Величину  $k$ , що збігається з кутовою швидкістю обертання радіуса  $OB$ , називають **круговою частотою коливань**.

Коливання, які здійснює точка відповідно до закону (16.6), називають **гармонічними коливаннями**. Графік цих коливань для  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  показаний на рис. 16.2.

Усім характеристикам цього руху можна дати наглядну кінематичну інтерпретацію

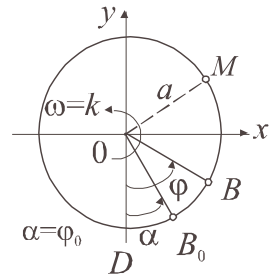


Рисунок 16.3

Проміжок часу  $T$ , протягом якого точка здійснює одне повне коливання, називають **періодом коливань**. Протягом періоду фаза коливань змінюється на  $2\pi$ . Таким чином:

$$kT = 2\pi,$$

звідси 
$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (16.8)$$

Величину  $\nu$ , яка обернена періоду та визначає кількість коливань в одиницю часу, називають **частотою коливань**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \quad (16.9)$$

Звідси видно, що величина  $k$  відрізняється від  $\nu$  лише постійним множником  $2\pi$ . Значення  $a$  та  $\alpha$  визначають з початкових умов.

Уважаючи, що при  $t = 0$ ,  $x = x_0$ , а  $v_x = v_0$ , одержимо:

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{v_0}{k} = a \cos \alpha.$$

Звідси 
$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{k\alpha_0}{v_0} \quad (16.10)$$

Відмітимо такі **властивості вільних коливань**:

1. Амплітуда та початкова фаза коливань залежить від початкових умов.

2. Частота  $k$ , а також період  $T$  коливань від початкових умов не залежать.

Звідси випливає, якщо в задачі необхідно визначити лише період або частоту коливань, то необхідно скласти диференціальне рівняння руху та звести його до вигляду (16.4). Потім період  $T$  визначають за формулою (16.8), не інтегруючи рівняння.

## 16.2. Вплив постійної сили на вільні коливання точки

На точку  $M$  окрім відновлювальної сили  $\vec{F}$ , що спрямована до центра  $O$ , діє постійна за модулем і напрямком сила  $\vec{P}$ .

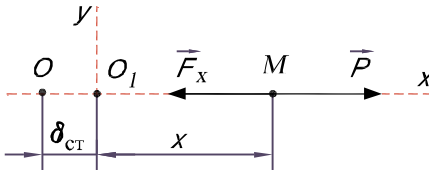


Рисунок 16.4

Величина сили  $\vec{F}$  (Рис. 16.4) пропорційна відстані від центра  $O$  до точки, тобто  $F = c \cdot OM$ .

Положенням рівноваги точки буде центр  $O_1$ , розміщений від  $O$  на відстані  $OO_1 = \delta_{ст}$ . Величину  $\delta_{ст}$  на-

зивають статичним відхиленням точки і визначають з рівності:

$$c \cdot \delta_{ст} = P,$$

або

$$\delta_{ст} = \frac{P}{c}. \quad (16.11)$$

Прийmemo центр  $O_1$  за початок відліку та направимо вісь  $O_1x$  у бік дії сили  $\vec{P}$ . Тоді  $F_x = -c(x + \delta_{ст})$ ,  $P_x = P$ .

Складаючи диференціальне рівняння руху та враховуючи, що  $c\delta_{ст} = P$ , отримаємо:

$$m\ddot{x} = -cx$$

або

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (16.12)$$

Отримане рівняння є аналогічним до рівняння (16.4).

Звідси висновок, що постійна сила  $\vec{P}$  не впливає на характер коливань, що відбуваються під дією відновлювальної сили  $\vec{F}$ , а лише зміщує центр цих коливань у бік дії сили  $\vec{P}$  на величину статичного відхилення  $\delta_{ст}$ .

Запишемо період коливань через  $\delta_{ст}$ . З формули (16.11) та (16.3)



$$k^2 = \frac{P}{m\delta_{\text{ст}}}.$$

Тоді за залежністю (16.8) отримаємо

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{P}\delta_{\text{ст}}}. \quad (16.13)$$

Отже період коливань пропорційний квадратному кореню зі статичного відхилення  $\delta_{\text{ст}}$ .

Якщо сила  $\vec{P}$  є силою ваги, що має місце при коливанні вантажу на вертикальній пружині, то  $P = mg$  і формула (16.13) набуде вигляду:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}}.$$

### 16.3. Коливання точки з опором, пропорційним швидкості

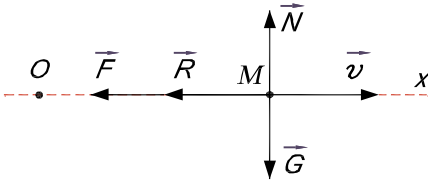


Рисунок 16.5

На матеріальну точку під час руху діє відновлювальна сила  $\vec{F}$  та сила опору  $\vec{R} = -\mu\vec{v}$  (Рис. 16.5). Тоді  $F_x = -cx$ ,  $R_x = -\mu v_x = -\mu\dot{x}$ , і диференціальне рівняння руху матиме вигляд

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

Розділивши обидві частини на  $m$ , запишемо рівняння так:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0, \quad (16.14)$$

де  $k^2 = \frac{c}{m}$ ,  $2b = \frac{\mu}{m}$ .

Рівняння (6.14) є диференціальним рівнянням вільних коливань з опором, пропорційним швидкості. Розв'язок рівняння (16.14) будемо шукати у вигляді  $x = e^{mt}$ . Підставивши це

значення  $x$  у рівняння (16.14), одержимо характеристичне рівняння  $n^2 + 2bn + k^2 = 0$ , корені якого

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \quad (16.15)$$

Розглянемо випадок, коли  $k > b$ , тобто коли опір малий порівняно з відновлювальною силою. Введемо позначення

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} \quad (16.16)$$

і отримаємо з (16.15)

$$n_{1,2} = b \pm ik_1.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.13) має вигляд:

$$x = e^{-bt} (C_1 \cos(k_1 t) + C_2 \sin(k_1 t)) \quad (16.17)$$

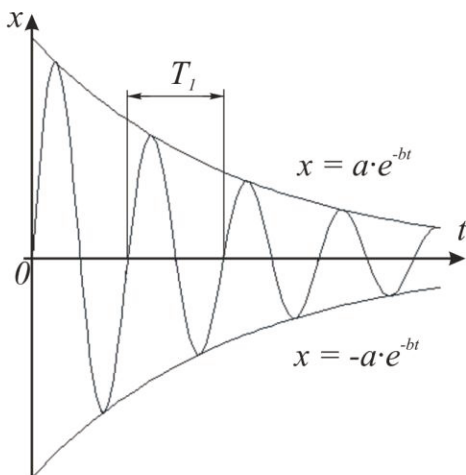
або

$$x = e^{-bt} a \sin(k_1 t + \alpha). \quad (16.18)$$

Величини  $a$  та  $\alpha$  є сталими інтегрування та їх визначають з початкових умов.

**Коливання, що проходять відповідно до закону (16.18), називають згасаючими коливаннями.** Графік цих коливань зображений на рис. 16.6.

Проміжок часу  $T_1$ , який дорівнює періоду  $\sin(k_1 t + \alpha)$ , називають **пері-**



**Рисунок 16.6**

**одом згасаючих коливань.**

Величину періоду згасаючих коливань визначають за залежністю

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}. \quad (16.19)$$

Формулу (16.19) можна записати так:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-\frac{b^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{b^2}{k^2}}} \approx T\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{k^2}\right). \quad (16.20)$$

З (16.20) видно, коли  $T_1 > T$ , тобто за наявності опору, період коливань збільшується. Але, якщо опір малий, коли  $b \ll k$ , то величина  $\frac{b^2}{k^2}$  стосовно одиниці нескінченно мала та її можна не враховувати. Тоді  $T_1 \approx T$ , тобто малий опір не впливає на період коливань точки.

Перше максимальне відхилення точки від положення рівноваги  $x_1$  проходить в момент часу  $t_1$ , друге відхилення  $x_2$  відбувається в момент часу  $t_2 = t_1 + T_1$  і так далі. Тоді за формулою (16.18) одержимо:

$$x_1 = ae^{-bt_1} \sin(k_1 t_1 + \alpha),$$

$$x_2 = ae^{-b(t_1+T_1)} \sin(k_1 t_1 + k_1 T_1 + \alpha) = x_1 e^{-bT_1}.$$

Аналогічно, для відхилення  $x_{n+1}$  буде

$$x_{n+1} = x_n e^{-bT_1}.$$

Таким чином, відхилення точки від положення рівноваги зменшуються за законом геометричної прогресії. Знаменник цієї прогресії  $e^{-bT_1}$  називають **декрементом коливань**, а модуль його логарифма, тобто величину  $bT_1$  – **логарифмічним декрементом**.

Малий опір не впливає на період коливань точки, але викликає зменшення відхилень від положення рівноваги за законом геометричної прогресії.

Розглянемо випадок, коли  $b > k$ , тобто коли опір стосовно відновлювальної сили великий.

У цьому разі корені характеристичного рівняння (16.15) дійсні.

Розв'язок рівняння (16.14) має вигляд:

$$x = C_1 e^{n_1 t} + C_2 e^{n_2 t},$$

де  $n_1, n_2 < 0$ .

Функція  $e^{-at}$ , коли  $a > 0$ , прямує до нуля й рух точки не буде коливним. Відновлювальна сила поверне точку в положення рівноваги. Графік такого руху показаний на рис. 16.7 (для  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $v_0 > 0$ ).

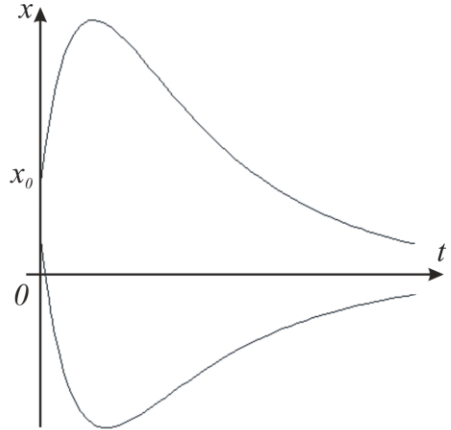


Рисунок 16.7

#### 16.4. Вимушені коливання. Резонанс

Розглянемо рух точки, коли на неї діє відновлювальна сила  $\vec{F}$  та періодична сила  $\vec{Q}$ , проекція якої на вісь  $x$  дорівнює:

$$Q_x = Q_0 \sin(pt). \quad (16.21)$$

Силу  $\vec{Q}$  називають збуджувальною силою. Величину  $p$  в (16.21) називають частотою збуджувальної сили.

Коливання точки, що відбуваються під дією збуджувальної сили називають вимушеними коливаннями.

##### Вимушені коливання за відсутності опору

Розглянемо рух точки, коли на неї, окрім відновлювальної сили  $\vec{F}$ , діє збуджувальна сила  $\vec{Q}$ . Тоді диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt).$$

Розділимо обидві частини рівняння на  $m$  і позначимо  $\frac{Q_0}{m} = p_0$ . Тоді рівняння руху запишемо так

$$\ddot{x} + k^2 x = p_0 \sin(pt). \quad (16.22)$$

Рівняння (16.22) є диференціальним рівнянням вимушених коливань точки за відсутності опору. Його розв'язок такий

$$x = x_1 + x_2,$$

де  $x_1$  – загальний розв'язок однорідного рівняння, тобто розв'язок рівняння (16.4) без правої частини,  $x_2$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (16.22).

Приймаємо  $p \neq k$  і шукаємо розв'язок  $x_2$  у вигляді

$$x_2 = A \sin(pt),$$

де  $A$  – стала величина, яку необхідно підібрати так, щоб рівність (16.22) перетворилась у тотожність.

Після підстановки значення  $x_2$  та його другої похідної у рівняння (16.22), одержимо

$$-p^2 A \sin(pt) + k^2 A \sin(pt) = p_0 \sin(pt).$$

Звідси 
$$A = \frac{P_0}{k^2 - p^2}$$

і тоді частинний розв'язок  $x_2$  такий:

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin(pt). \quad (16.23)$$

Отже загальний розв'язок рівняння (16.22) запишемо так:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin(pt). \quad (16.24)$$

де  $a$  і  $\alpha$  – сталі інтегрування, які визначають з початкових умов. Розв'язок (16.24) показує, що коливання точки в цьому випадку складається з: 1) коливань з амплітудою  $a$ , залежною від

початкових умов, і частотою  $k$ , які називають **вільними коливаннями**; 2) коливань з амплітудою  $A$ , незалежною від початкових умов та частотою  $p$ , які називають **вимушеними коливаннями**.

Завдяки наявності сил опору, власні коливання швидко згасають. А тому основне значення в такому русі точки відіграють вимушені коливання, які задають залежністю (16.23). Частота  $p$  вимушених коливань дорівнює частоті збуджувальної сили. Амплітуду  $A$  цих коливань можна записати так:

$$A = \frac{p_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{\frac{p_0}{k^2}}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|} = \frac{\delta_0}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}, \quad (16.25)$$

де  $\delta_0$  – статичне відхилення точки під дією сили  $Q_0$ , величина якого відповідно до залежностей (16.4) та (16.22)

$$\delta_0 = \frac{p_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c}.$$

Відношення амплітуди коливань до статичного відхилення точки називають коефіцієнтом динамічності  $\left(\frac{A}{\delta_0}\right)$ .

Амплітуда  $A$  і коефіцієнт динамічності  $\frac{A}{\delta_0}$  залежать від відношення частот  $\lambda = \frac{p}{k}$ . Графік залежності величини  $\frac{A}{\delta_0}$  від  $\lambda$  зображений на рис. 16.8 (крива  $h = 0$  – без опору,  $h \neq 0$  – за наявності опору).

Згідно з формулою (16.25) або графіком на рис. 16.8, підібравши співвідношення між  $p$  та  $k$ , можна отримати вимушені коливання з різними амплітудами.

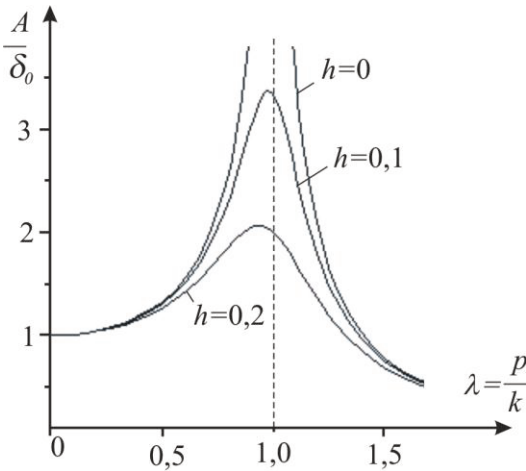


Рисунок 16.8

Для  $p = 0$  амплітуда  $A$  дорівнює  $\delta_0$  або близька до цієї величини. Якщо  $p$  наближається до  $k$ , амплітуда  $A$  стає дуже великою. Якщо  $p \gg k$ , то амплітуда  $A$  стає дуже малою.

Для  $p < k$ , як видно із порівняння формул (16.21) та (16.23), фази вимушених коливань та збуджувальної сили є однаковими. Якщо

$p > k$ , то внісши знак мінус під знак синуса у формулі (16.23), отримаємо

$$x_2 = \frac{P_0}{p^2 - k^2} \sin(pt - \pi).$$

Для  $p > k$  зсув між фазами вимушених коливань та збуджувальної сили дорівнює  $\pi$ .

### Резонанс

У разі, коли  $p = k$ , тобто коли частота збуджувальної сили дорівнює частоті вільних коливань, має місце явище резонансу.

Частковий розв'язок рівняння (16.22) будемо шукати у вигляді:

$$x_2 = Bt \cos(pt).$$

Тоді закон вимушених коливань при резонансі у випадку відсутності опору запишемо так

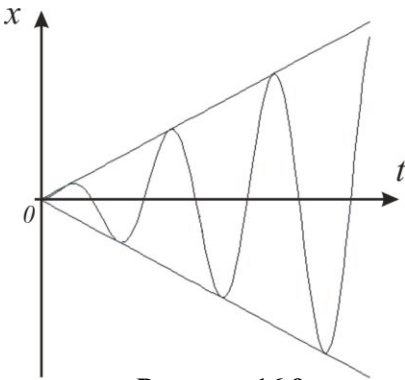


Рисунок 16.9

$$x_2 = \frac{P_0}{2p} t \cos(pt)$$

або

$$x_2 = \frac{P_0}{2p} t \sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right). \quad (16.26)$$

Амплітуда вимушених коливань при резонансі зростає пропорційно до часу (Рис. 16.9). Зсув фаз при резонансі дорівнює  $\frac{\pi}{2}$ .

### Вимушені коливання з урахуванням сили опору

Розглянемо рух точки, на яку діють: відновлювальна сила  $\vec{F}$ , сила опору  $\vec{R}$  та збуджувальна сила  $\vec{Q}$ . Диференціальне рівняння руху точки має такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q \sin(pt),$$

або

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = p_0 \sin(pt). \quad (16.27)$$

Рівняння (16.27) є диференціальним рівнянням вимушених коливань точки з урахуванням сили опору.

Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд  $x = x_1 + x_2$ , де  $x_1$  – загальний розв'язок рівняння (16.27) без правої частини,  $x_2$  – частинний розв'язок повного рівняння (16.27).

Частинний розв'язок  $x_2$  будемо шукати у такому вигляді:

$$x_2 = A \sin(pt - \beta),$$

де  $A$  та  $\beta$  – сталі, які необхідно дібрати.



Підставивши вираз для  $x_2$  та похідні від нього по  $t$  у рівняння (16.27), отримаємо два рівняння для визначення  $A$  та  $\beta$ :

$$A(k^2 - p^2) = p_0 \cos \beta, \quad 2bpA = p_0 \sin \beta.$$

Звідси

$$A = \frac{p_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}. \quad (16.28)$$

Вираз для  $x_1$  при  $k > b$  візьмемо з формули (16.18) і розв'язок рівняння (16.27) запишемо так:

$$x = ae^{-bt} \sin(kt + \alpha) + A \sin(pt - \beta), \quad (16.29)$$

де  $a$  та  $\alpha$  – сталі інтегрування.

Як видно з (16.29), вимушені коливання з урахуванням сили опору складаються із власних та вимушених коливань.

Для дослідження одержаних результатів введемо позначення:

$$\frac{b}{k} = h, \quad (16.30)$$

де  $h$  – величина, що характеризує опір. Тоді амплітуду  $A$  можна записати так:

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2h\lambda}{1 - \lambda^2}. \quad (16.31)$$

Амплітуда  $A$  та  $\beta$  залежать від двох безрозмірних параметрів  $\lambda$  та  $h$ . Графік залежності  $\frac{A}{\delta_0}$  від  $\lambda$  для деяких значень  $h$

показаний на рис. 16.8.

У кожній конкретній задачі за її даними можна вирахувати величини  $\delta_0$ ,  $\lambda$ ,  $h$  і, використовуючи формули (16.31), знайти значення  $A$  та  $\beta$ . З цих формул видно, що змінюючи співвід-

ношення між  $p$  та  $k$ , можна отримати вимушені коливання з різними амплітудами.

Розглянемо **окремі випадки**.

1. Якщо відношення частот дуже мале число ( $p \ll k$ ), тоді прийнявши  $\lambda \approx 0$ , з формули (16.31) отримаємо  $A \approx \delta_0$ . Тоді коливання проходять з амплітудою  $\delta_0$  та зсувом фаз  $\beta = 0$ .

2. Якщо відношення частот  $\lambda$  дуже велике число ( $p \gg k$ ), то  $A$  стає малою величиною. Цей випадок цікавий стосовно вібрації споруд та машин. При цьому, враховуючи малий опір і нехтуючи в (16.31) величиною  $2h\lambda$  і одиницею відносно  $\lambda^2$ , отримуємо наближену формулу для амплітуди  $A$ :

$$A = \frac{\delta_0}{\lambda^2} = \frac{p_0}{p^2}. \quad (16.32)$$

3. У практичних випадках величина  $h$  набагато менша від одиниці. Тоді, як видно з формули (16.31), якщо величина  $\lambda$  близька до одиниці, амплітуда вимушених коливань досягає максимуму. Це явище називають **резонансом**.

Наближені формули для амплітуди  $A$  та зсуву фаз  $\beta$  можна отримати, прийнявши  $\lambda = 1$  у формулах (16.31)

$$A_p = \frac{\delta_0}{2h}, \quad \beta_p = \frac{\pi}{2}. \quad (16.33)$$

З формул (16.33) видно, що для малих  $h$  амплітуда вимушених коливань  $A_p$  може бути як завгодно велика.

### **Загальні властивості вимушених коливань**

Вимушені коливання мають такі властивості, які відрізняють їх від власних коливань:

а) амплітуда вимушених коливань не залежить від початкових умов;

б) вимушені коливання не згасають за наявності сил опору;  
в) частота вимушених коливань дорівнює частоті збуджувальної сили та від характеристик коливальної системи не залежить;

г) навіть за наявності малої збуджувальної сили можна отримати інтенсивні вимушені коливання, якщо опір малий, а частота  $p$  наближається до частоти  $k$  ;

д) за наявності великої збуджувальної сили можна отримати малі вимушені коливання, якщо частота  $p$  буде набагато більша від частоти  $k$  .

Вимушені коливання, особливо резонанс, використовують у фізиці та техніці. При роботі машин та двигунів виникають періодичні сили, які викликають вимушені коливання. Шляхом добору  $p$  та  $k$  досягають того, що амплітуда вимушених коливань практично дорівнює нулю. Протилежний приклад маємо в радіотехніці, де резонанс є корисним і його використовують для відокремлення радіосигналів однієї радіостанції від іншої.

### Контрольні запитання

1. Записати диференціальне рівняння вільних коливань за відсутності опору та навести його розв'язок.

2. Що називають періодом коливань?

3. Перерахуйте властивості вільних коливань.

4. Як визначити період коливань без інтегрування диференціального рівняння руху?

5. Записати диференціальне рівняння вільних коливань з опором, пропорційним швидкості та навести його розв'язок.

6. За якою формулою визначають період згасаючих коливань?

7. Як впливає величина опору на період коливань?

8. Записати диференціальне рівняння вимушених коливань за відсутності опору та навести його розв'язок.
9. Що називають коефіцієнтом динамічності ?
10. Перерахуйте властивості вимушених коливань.
11. Яке явище називають резонансом ?

## Глава 17. Динаміка відносного руху точки

### 17.1. Диференціальне рівняння відносного руху точки

Закони динаміки та отримані з них рівняння й теореми справдливі лише для абсолютного руху точки, тобто руху відносно інерціальної нерухомої системи відліку.

Розглянемо матеріальну точку  $M$ , що рухається під дією прикладених до неї сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Будемо вивчати рух цієї точки відносно системи координат  $Oxyz$ , яка в свою чергу рухається відносно нерухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ . Знайдемо залежність між відносним прискоренням  $\vec{a}_r$  та силами, які діють на точку.

Для абсолютного руху основний закон динаміки має вигляд:

$$m\vec{a}_a = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (17.1)$$

Згідно з теоремою Коріоліса

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Підставивши  $\vec{a}_a$  в (17.1), отримаємо:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c).$$

Введемо позначення

$$\vec{F}_e^{\text{ін}} = -m\vec{a}_e, \quad \vec{F}_c^{\text{ін}} = -m\vec{a}_c.$$

Величини  $\vec{F}_e^{\text{ін}}$ ,  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  за розмірністю є силами. Назвемо їх відповідно **переносною та коріолісовою силами інерції**.

Тоді залежність (17.1) запишемо так:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{F}_e^{\text{ін}} + \vec{F}_c^{\text{ін}}. \quad (17.2)$$

Залежність (17.2) виражає **основний закон динаміки для відносного руху точки**. Порівнюючи рівняння (17.1) та (17.2), приходимо до висновку: всі рівняння для відносного руху точки

складають так само, як рівняння абсолютного руху, якщо до сил, що діють на точку внаслідок взаємодії з іншими тілами, додати переносну й коріолісову сили інерції. Додавання сил  $\vec{F}_e^{\text{ін}}$  та  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  враховує вплив переміщення рухомої системи відліку на відносний рух точки.

Розглянемо окремі випадки.

1. Якщо рухома система відліку рухається поступально, тоді  $\vec{F}_c^{\text{ін}} = 0$  ( $\omega_e = 0$ ) і закон відносного руху має вигляд:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{F}_e^{\text{ін}} \quad (17.3)$$

2. Якщо рухома система відліку рухається поступально, рівномірно і прямолінійно ( $a_e = a_c = 0$ ), тоді  $\vec{F}_e^{\text{ін}} = \vec{F}_c^{\text{ін}} = 0$  і закон відносного руху матиме такий самий вигляд, як і закон руху відносно нерухомої системи відліку. Отже, така система відліку також є інерціальною. З цього випливає, що **ніяким механічним експериментом неможливо виявити, перебуває дана система відліку в стані спокою, чи рухається поступально, рівномірно та прямолінійно.**

У цьому й полягає відкритий Галілеєм принцип відносності класичної механіки.

3. Якщо точка відносно рухомої системи відліку перебуває у стані спокою, то для неї  $\vec{a}_r = 0$ ,  $\vec{v}_r = 0$ , а звідси і  $\vec{F}_c^{\text{ін}} = 0$ , тому що прискорення Коріоліса дорівнює  $a_c = 2\omega_e v_r \sin \alpha$ . Тоді рівність (17.3) набуде вигляду:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{F}_e^{\text{ін}} = 0. \quad (17.4)$$

Залежність (17.4) є **рівнянням відносного стану спокою точки**. Звідси випливає, що рівняння відносного спокою складають так, як рівняння рівноваги в нерухомій системі відліку, якщо при цьому до сил, які діють на точку, додати переносну силу інерції.

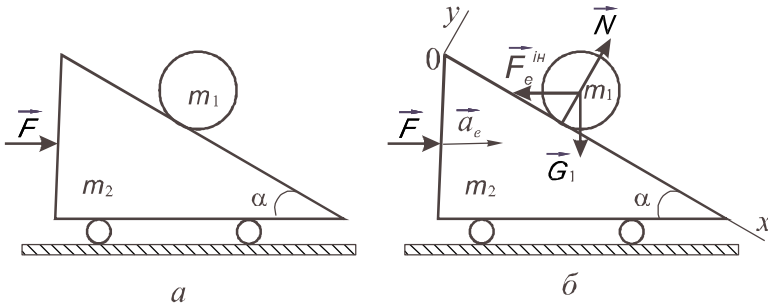
4. При складанні рівнянь відносного руху у випадках, коли  $\vec{F}_c^{\text{ін}} \neq 0$ , необхідно врахувати, що  $\vec{F}_c^{\text{ін}} = -m\vec{a}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$ . Отже сила  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  перпендикулярна до швидкості  $\vec{v}_r$ , яка напрямлена по дотичній до відносної траєкторії точки. А тому проекція коріолісової сили інерції на дотичну  $\vec{t}$  до відносної траєкторії точки завжди дорівнює нулю й рівняння у відносному русі запишемо так:

$$m \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{k\tau} + \vec{F}_{e\tau}^{\text{ін}}. \quad (17.5)$$

У інші рівняння відносного руху будуть входити як переносна, так і коріолісова сили інерції.

**Задача 17.1.** Визначити, з якою силою потрібно переміщати гладку похилу площину масою  $m_2$  у горизонтальному напрямі (Рис. 17.1, а), щоб розміщене на ній тіло масою  $m_1$  перебувало відносно похилої площини у стані спокою.

### Розв'язок



**Рисунок 17.1**

Якщо тіло масою  $m_1$  перебуває в стані відносного спокою стосовно рухомої площини, то застосуємо рівняння (17.4). Покажемо сили, які діють на тіло (Рис. 17.1, б): переносна сила інерції  $\vec{F}_e^{\text{ін}}$ , спрямована протилежно до переносного прискорення  $\vec{a}_e$ , з яким рухається площина під дією сили  $\vec{F}$ , сила ваги  $\vec{G}_1$  та

реакція гладкої площини  $\vec{N}$ . Запишемо рівняння відносного спокою тіла

$$\vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{F}_e^{\text{ін}} = 0.$$

Проектуємо вектори цього рівняння на вісь  $Ox$ , пов'язану з рухомою площиною. Отримаємо рівняння

$$G_1 \sin \alpha - F_e^{\text{ін}} \cos \alpha = 0,$$

з якого визначимо модуль прискорення  $a_e$ :

$$m_1 g \sin \alpha - m_1 a_e \cos \alpha = 0,$$

або

$$a_e = g \operatorname{tg} \alpha.$$

Сила, з якою потрібно переміщати площину,

$$F = (m_1 + m_2) a_e = (m_1 + m_2) g \operatorname{tg} \alpha.$$

## 17.2. Вплив обертання Землі на рівновагу та рух тіл

Під час розв'язку більшості технічних задач систему відліку, пов'язану з Землею, вважають інерціальною (нерухомою). Цим не враховують добове обертання Землі та її рух по орбіті навколо Сонця. Переносна сила інерції, що відповідає руху Землі по орбіті навколо Сонця, практично зрівноважена силою притягання до Сонця. Приймаючи систему відліку, яка пов'язана з Землею, за інерціальною, нехтують лише добовим обертанням Землі відносно зірок. Це обертання проходить зі швидкістю: 1 оберт за 23 год. 56 хв. 4 сек., тобто з кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \approx 0,0000729 = 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Покажемо, як впливає обертання Землі на рівновагу та рух тіл.

### Відносний стан спокою на поверхні Землі. Сила ваги

Розглянемо матеріальну точку, яка розміщена на нерухомій відносно Землі гладкій "горизонтальній" поверхні (Рис. 17.2). Відповідно до (17.4) умови рівноваги запишемо так



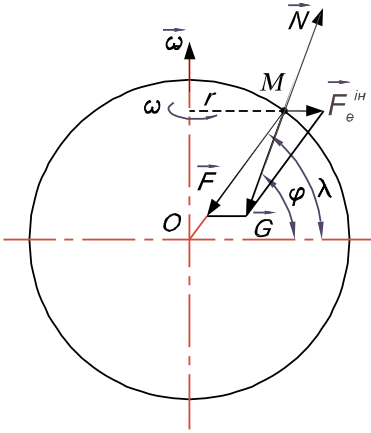


Рисунок 17.2

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e^{\text{in}} = 0,$$

де  $\vec{F}$  – сила тяжіння Землі,  $\vec{N}$  – реакція площини,  $\vec{F}_e^{\text{in}}$  – **переносна сила інерції**.

Оскільки  $\omega = \text{const}$ , то сила  $\vec{F}_e^{\text{in}}$  має лише **нормальну складову**, спрямовану від осі обертання Землі.

Додамо сили  $\vec{F}$  та  $\vec{F}_e^{\text{in}}$  і введемо позначення

$$\vec{F} + \vec{F}_e^{\text{in}} = \vec{G}.$$

Тоді на точку  $M$  будуть діяти дві сили  $\vec{G}$  та  $\vec{N}$ , які зрівноважують одна одну.

Сила  $\vec{G}$  і є та сила, яку називають **силою ваги**. Напрямок сили  $\vec{G}$  буде напрямком вертикалі у даному пункті земної поверхні, а площина, перпендикулярна до  $\vec{G}$ , буде горизонтальною площиною.

За модулем  $F_e^{\text{in}} = mr\omega^2$  ( $r$  – відстань від земної осі до точки) мала величина порівняно з силою тяжіння  $\vec{F}$ . А тому напрямок сили  $\vec{G}$  мало відрізняється від напрямку сили  $\vec{F}$ . Величина  $F_e^{\text{in}}$  буде найбільша на екваторі, де  $r = R$ . Тут її значення складає до 0,34% сили тяжіння. Найбільша різниця показаних на рис. 17.2 кутів  $\lambda$  (**геоцентрична широта**) та  $\varphi$  (**астрономічна широта**) є тоді, коли  $\lambda = 45^\circ$ , і дорівнює наближено  $11'$ .

Під час зважування тіл визначають силу ваги  $\vec{G}$ , оскільки з такою силою тіло діє на шальку терезів. Уводячи в рівняння силу  $\vec{G}$ , одночасно враховують і силу  $\vec{F}_e^{\text{in}}$ . Тому при складанні рівнянь рівноваги тіл відносно Землі необхідність введення поправки на обертання Землі відповідає.

### Відносний рух тіла поблизу поверхні Землі

Для врахування обертання системи осей, пов'язаних з Землею, необхідно до сил, які діють на тіло, додати сили  $\vec{F}_e^{\text{ін}}$  та  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ . Сила  $\vec{F}_e^{\text{ін}}$  входить у силу ваги  $\vec{G}$ . Отже, коли осі пов'язані з Землею вважати нерухомими, то не враховують лише коріолісову силу інерції:

$$F_c^{\text{ін}} = 2m \cdot \omega \cdot v_r \cdot \sin \alpha$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання Землі,  $\alpha$  – кут між відносною швидкістю  $\vec{v}_r$  точки та земною віссю, тобто між  $\vec{\omega}$  і  $\vec{v}_r$ .

Оскільки величина  $\omega$  дуже мала, то, для невеликих відносних швидкостей, силу інерції Коріоліса  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  можна не враховувати. Наприклад, при швидкості  $v_r = 700 \text{ м/с}$  (швидкість артилерійського снаряда) та  $\alpha = 90^\circ$  ця сила складає лише 1% від сили  $\vec{G}$ . Вплив обертання Землі набуває практичного значення для великих швидкостей (політ ракет далекої дії), або для рухів, що відбуваються довгий час (течії рік, повітря та морські течії).

### Рух по земній поверхні

Якщо точка рухається по меридіану північної півкулі з півночі на південь, то прискорення Коріоліса  $\vec{a}_c$  направлене на схід, а сила  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  – на захід.

Якщо рух з півдня на північ – сила  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  направлена на схід. В обох випадках ця сила буде відхиляти точку вправо від напрямку її руху.

Якщо точка рухається по паралелі на схід, то прискорення Коріоліса  $\vec{a}_c$  буде

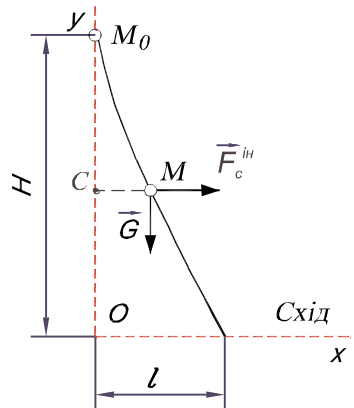


Рисунок 17.3

спрямоване по радіусу  $\overline{MC}$  (Рис. 17.3), а сила  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  – у протилежний бік.

Вертикальна складова цієї сили (вздовж  $OM$ ) буде змінювати вагу тіла, а горизонтальна складова, направлена на південь, буде відхиляти точку вправо від напрямку руху. Аналогічний результат одержимо при русі точки по паралелі на Захід.

Отже, в північній півкулі тіло, яке рухається вздовж земної поверхні в довільному напрямку, внаслідок обертання Землі буде відхилятися вправо від напрямку руху. У південній півкулі відхилення буде проходити вліво. Цим пояснюється підмивання правого берега (**закон Бера**) річки в північній півкулі, відхилення вітрів постійного напрямку (пасати) та морських течій.

### Вертикальне падіння

Щоб визначити напрям сили інерції Коріоліса  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ , що діє на точку, яка вільно падає, необхідно знати напрямок відносної швидкості  $\vec{v}_r$  точки. Оскільки сила  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  дуже мала порівняно з силою тяжіння, то швидкість  $\vec{v}_r$  можна вважати напрямленою по вертикалі, тобто по лінії  $OM$  (Рис. 17.3). Тоді вектор прискорення Коріоліса  $\vec{a}_c$  буде напрямлений на захід, а сила інерції  $\vec{F}_c^{\text{ін}}$  – на схід.

Отже, точка або тіло, які вільно падають, відхиляються внаслідок обертання Землі від вертикалі на схід. Тіло, кинуте вертикально вверх, буде при підйомі відхилятися на захід. Величини цих відхилень дуже малі та помітні лише при достатньо великих висотах падіння або підйому.

Наприклад, на широті  $\lambda = 55^\circ 47'$ , при падінні з висоти  $H = 100\text{ м}$  ( $g = 9,816 \text{ м/с}^2$ ) тіло відхиляється вправо на  $\ell = 1,2 \text{ см}$ .

## Контрольні запитання

1. Записати основний закон динаміки для відносного руху точки.
2. Записати закон відносного руху точки, якщо рухома система відліку рухається поступально.
3. У чому полягає принцип відносності класичної механіки?
4. Який вигляд має рівняння відносного стану спокою точки?
5. Яка відмінність між силою тяжіння та силою ваги?
6. Коли вплив обертання Землі набуває практичного значення при розв'язку задач?
7. Як впливає обертання Землі на рух по земній поверхні та на вертикальне падіння тіл?
8. У чому полягає закон Бера?

## Глава 18. Вступ в динаміку механічної системи. Моменти інерції твердого тіла

### 18.1. Механічна система. Зовнішні та внутрішні сили

**Механічною системою матеріальних точок або тіл називають таку їх сукупність, в якій положення або рух кожної точки (тіла) залежить від положення та руху всіх інших точок (тіл).**

Матеріальне тіло будемо розглядати як систему матеріальних частин (точок), які утворюють це тіло.

Прикладом механічної системи є Сонячна система, в якій усі тіла пов'язані силами тяжіння. Другим прикладом механічної системи є довільна машина або механізм, в якому всі тіла зв'язані шарнірами, стержнями, тросами.

Група літаків у повітрі механічну систему не утворює, оскільки між ними відсутні сили механічної взаємодії.

Сили, що діють на точки системи, розділяють на **зовнішні (exterieur)** та **внутрішні (interieur)**. Сили, що діють на точки системи з боку точок або тіл, що не входять до складу даної системи, називають **зовнішніми**. Сили, що діють на точки системи з боку інших точок або тіл цієї ж системи, називають **внутрішніми**. Зовнішні сили позначають  $\vec{F}^e$ , внутрішні –  $\vec{F}^i$ . Як зовнішні, так і внутрішні сили можуть бути активними або реакціями в'язей. Поділ сил на зовнішні та внутрішні є умовним і залежить від того, рух якої системи тіл розглядають. Наприклад, якщо розглядати рух усієї Сонячної системи загалом, то сила тяжіння Землі до Сонця буде внутрішньою; при вивченні руху Землі по її орбіті навколо Сонця цю ж силу слід розглядати як зовнішню.

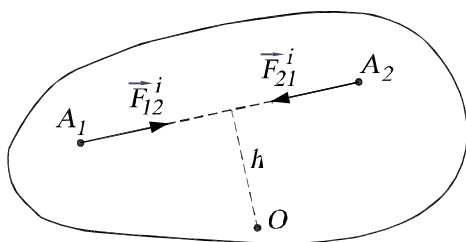
**Внутрішні сили мають такі властивості.**

1. Геометрична сума (головний вектор) усіх внутрішніх сил системи або сума проєкцій цих сил на довільну вісь дорівнюють нулю.

Згідно з третім законом динаміки дві довільні точки системи діють одна на одну з однаковими за модулем і протилежно направленими силами  $\vec{F}_{12}^i$  та  $\vec{F}_{21}^i$ , сума яких дорівнює нулю (Рис. 18. 1). Аналогічний результат має місце для довільної пари точок, тому

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^n F_{kx}^i = 0.$$

2. Сума моментів (головний момент) усіх внутрішніх сил системи відносно довільного центра або осі дорівнює нулю. Дійсно, якщо взяти довільний центр  $O$  (Рис. 18.1) , то видно,



$$m_O(\vec{F}_{12}^i) + m_O(\vec{F}_{21}^i) = 0.$$

**Рисунок 18.1**

Аналогічний результат отримаємо, обчислюючи моменти відносно осі. Отже, для всієї системи маємо:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k^i) = 0.$$

З доведених властивостей не випливає, що внутрішні сили взаємно зрівноважені та не впливають на рух системи, оскільки ці сили прикладені до різних матеріальних точок і можуть викликати взаємне переміщення цих точок. Зрівноваженими внутрішні сили можуть бути лише тоді, коли система, яку розглядають, є абсолютно твердим тілом.

## 18.2. Диференціальні рівняння руху системи точок

Розглянемо систему, яку складають  $n$  матеріальних точок. Виділимо довільну точку системи з масою  $m_k$ . Рівнодійні прикладених до цієї точки зовнішніх і внутрішніх сил позначимо від-

повідно  $\vec{F}_k^e$  та  $\vec{F}_k^i$ . Запишемо основний закон динаміки для цієї точки:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

Для точок системи, яку складають  $n$  матеріальних точок, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i; \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i; \\ \dots\dots\dots \\ m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{cases} \quad (18.1)$$

Ці рівняння, з яких можна визначити закон руху кожної точки системи, називають **диференціальними рівняннями руху системи у векторній формі**.

Спроектуювши рівності (18.1) на певну координатну вісь, отримаємо диференціальні рівняння руху системи в проєкціях на цю вісь.

Повний розв'язок основної задачі динаміки для системи полягає в тому, щоб, знаючи задані сили, проінтегрувати відповідні диференціальні рівняння та визначити закон руху кожної точки окремо.

Але такий шлях розв'язку не використовують з двох причин. По–перше, цей шлях дуже складний, оскільки пов'язаний з великими математичними труднощами. По–друге, в більшості випадків для розв'язку задач механіки достатньо знати деякі характеристики руху системи взагалі, а не рух кожної з її точок зокрема. Ці характеристики визначають з допомогою загальних теорем динаміки системи.

Для отримання загальних теорем динаміки системи використовують систему диференціальних рівнянь (18.1).

### 18.3. Маса системи. Центр мас

Рух системи залежить не тільки від сил, які на неї діють, а також і від її сумарної маси та розподілу мас. Маса системи дорівнює арифметичній сумі мас усіх точок або тіл, що входять до системи,

$$M = \sum_{k=1}^n m_k .$$

Геометричну точку  $C$ , радіус–вектор якої визначають за формулою

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k , \quad (18.2)$$

називають **центром мас або центром інерції механічної системи**.

Спроєктувавши (18.2) на осі декартової системи координат, отримаємо **координати центра мас системи**:

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k , \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k , \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k . \quad (18.3)$$

Якщо помножимо чисельник і знаменник у формулах (18.2) та (18.3) на  $g$  (прискорення земного тяжіння), то отримаємо радіус–вектор та координати центра тяжіння системи ( $G = \sum G_k$ ,  $G_k = m_k g$ ):

$$\vec{r}_C = \frac{g}{M \cdot g} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n G_k \vec{r}_k ;$$
$$x_C = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n G_k x_k ; \quad y_C = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n G_k y_k ; \quad z_C = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n G_k z_k .$$

Якщо тіло перебуває в однорідному полі земного тяжіння, то центр мас збігається з центром тяжіння тіла. Але ці поняття не тотожні. Поняття центра тяжіння властиве твердому тілу, що перебуває в полі земного тяжіння. Поняття центра мас властиве для довільної системи матеріальних точок або тіл і не залежить від того, чи перебуває ця система під дією сил.



## 18.4. Момент інерції тіла. Радіус інерції

Для характеристики розподілу маси системи або твердого тіла для дослідження обертального руху необхідно ввести поняття моменту інерції.

Моментом інерції механічної системи, яку складають  $n$  матеріальних точок, відносно центра  $O$  називають суму добутків мас цих точок на квадрати їх відстаней до центра  $O$ , тобто

$$I_O = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \quad (18.4)$$

Момент інерції відносно центра часто називають полярним моментом інерції.

Моментом інерції системи матеріальних точок відносно осі називають суму добутків мас цих точок на квадрати їх відстаней до осі, тобто

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2. \quad (18.5)$$

Запишемо моменти інерції системи матеріальних точок відносно декартових осей координат та центра  $O$  – початку координат:

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2),$$
$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2), \quad I_O = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + y_k^2 + x_k^2), \quad (18.6)$$

де  $x_k, y_k, z_k$  – координати матеріальних точок системи.

З наведених формул (18.6) випливає така залежність:

$$2I_O = I_x + I_y + I_z. \quad (18.7)$$

**Моментом інерції твердого тіла відносно деякої осі називають суму добутків мас  $\Delta m_k$  елементарних частин цього тіла на квадрати їх відстаней до цієї осі**

$$I_z = \sum_{k=1}^n \Delta m_k h_k^2. \quad (18.8)$$

У разі неперервного розподілу маси за момент інерції приймають границю суми (18.8), коли  $n \rightarrow \infty$ , тобто  $\Delta m_k \rightarrow 0$

$$I_z = \lim_{\Delta m_k} \sum_{k=1}^n \Delta m_k h_k^2 = \int_{(m)} h^2 dm. \quad (18.9)$$

Розмірність моменту інерції в SI є  $[\text{кг} \cdot \text{м}^2]$ .

Відношення  $\frac{I_z}{m}$ , де  $m$  – маса тіла, має розмірність квадрата довжини. Квадратний корінь з цього відношення позначимо через  $\rho$ , тоді

$$\rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$

або

$$I_z = \rho^2 m. \quad (18.10)$$

Величину  $\rho$  називають **радіусом інерції тіла** відносно осі  $Oz$ .

Радіусом інерції  $\rho$  тіла відносно осі  $Oz$  називають відстань від цієї осі, на якій потрібно розмістити всю масу тіла, не змінюючи моменту інерції тіла.

**Увівши поняття радіуса інерції, можна момент інерції твердого тіла записати як момент інерції деякої точки, маса якої дорівнює масі тіла та віддалена від осі  $Oz$  на відстань  $\rho$ .**

## 18.5. Момент інерції відносно паралельних осей. Теорема Гюйгенса–Штейнера

**Теорема.** Момент інерції тіла відносно даної осі  $Oz$  дорівнює сумі моменту інерції цього тіла відносно осі  $Cz'$ , яка паралельній даній і проходить через центр мас тіла, та добутку маси  $M$  тіла на квадрат відстані  $d$  між осями (Рис. 18.2), тобто:

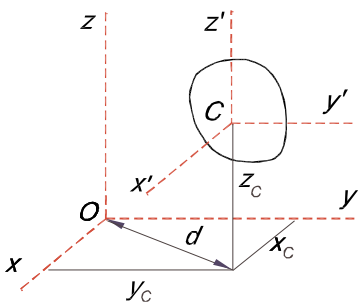
$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2. \quad (18.11)$$

Доведення. Позначимо координати точки  $C$  центру мас тіла у системі координат  $Oxyz$  через  $x_C, y_C, z_C$ . Через точку  $C$  проведемо осі  $Cx', Cy', Cz'$  паралельно до  $Ox, Oy, Oz$ . Квадрат відстані  $d$  між осями  $Oz$  та  $Cz'$  дорівнює

$$d^2 = x_C^2 + y_C^2.$$

Для довільної точки тіла будемо мати

$$x_k = x'_k + x_C, \quad y_k = y'_k + y_C.$$



**Рисунок 18.2**

Скориставшись формулою (18.6), запишемо:

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^n m_k \left[ (x'_k + x_{\tilde{N}})^2 + (y'_k + y_{\tilde{N}})^2 \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \left[ (x_k'^2 + y_k'^2) \right] + (x_{\tilde{N}}^2 + y_{\tilde{N}}^2) \sum_{k=1}^n m_k + 2x_{\tilde{N}} \sum_{k=1}^n x'_k m_k + \\ &+ 2y_{\tilde{N}} \sum_{k=1}^n y'_k m_k. \end{aligned}$$

Дві останні суми дорівнюють нулю. Дійсно, відповідно до формул

$$\sum_{k=1}^n x'_k m_k = Mx'_C = 0, \quad \sum_{k=1}^n y'_k m_k = My'_C = 0,$$

оскільки координати центра мас  $C$  тіла в системі координат  $Cx'y'z'$  дорівнюють нулю.

Таким чином

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2,$$

$$\text{де } I_{Cz'} = \sum_{k=1}^n (x_k'^2 + y_k'^2) m_k, \quad d^2 = x_C^2 + y_C^2, \quad M = \sum_{k=1}^n m_k.$$

## 18.6. Обчислення моментів інерції деяких однорідних тіл

### Тонкий однорідний стержень з довжиною $\ell$ і масою $M$

Обчислимо його момент інерції відносно осі  $Az$ , яка перпендикулярна до стержня та проходить через його кінець (Рис. 18.3)

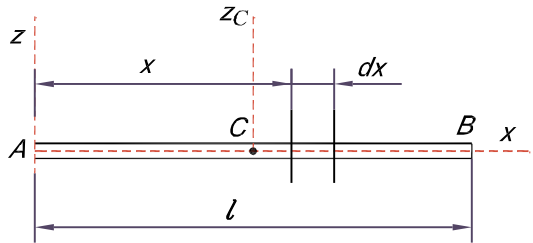


Рисунок 18.3

Спрямуємо вісь  $Ax$  уздовж стержня. Тоді для довільного елемента довжиною  $dx$ :

$$h = x,$$

а маса

$$dm = \rho_1 dx,$$

де  $\rho_1 = \frac{M}{\ell}$  – маса одиниці довжини стержня.

Після підстановки цих величин у формулу (18.9) і заміни  $\rho_1$ , отримаємо

$$I_{Az} = \int_0^{\ell} x^2 dm = \int_0^{\ell} \rho_1 x^2 dx = \rho_1 \frac{\ell^3}{3},$$

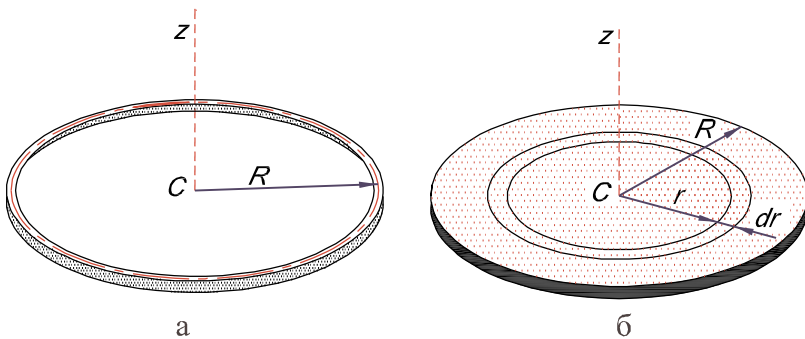
або 
$$I_{Az} = \frac{1}{3} M \ell^2. \quad (18.12)$$

**Момент інерції стержня відносно осі  $Cz$ , яка проходить через центр мас стержня, дорівнює  $I_{Cz} = \frac{1}{12} M \ell^2$ .**

**Тонке кругле однорідне кільце з радіусом  $R$  і масою  $M$  (однорідна тонка кругла труба)**

Знайдемо момент інерції кільця відносно осі  $Cz$ , яка перпендикулярна до площини кільця та проходить через його центр (Рис. 18.4, а). Оскільки всі точки кільця розміщені від осі  $Cz$  на відстанях  $h_k = R$ , то за формулою (18.4) матимемо

$$I_{Cz} = \sum_{k=1}^n m_k R^2 = R^2 \sum_{k=1}^n m_k = MR^2. \quad (18.13)$$



**Рисунок 18.4**

**Кругла однорідна пластина з радіусом  $R$  і масою  $M$  (однорідний круглий суцільний циліндр)**

Визначимо момент інерції круглої пластини відносно осі  $Cz$ , яка перпендикулярна до площини пластини та проходить через її центр (Рис. 18.4, б). Для цього виділимо елементарне кільце радіусом  $r$  і шириною  $dr$ . Площа цього кільця дорівнює  $2\pi r dr$ , а маса –  $dm = \rho_2 2\pi r dr$ , де  $\rho_2 = \frac{M}{\pi R^2}$  – маса одиниці

площі пластини. Тоді згідно з формулою (18.9)

$$I_{Cz} = \int_0^R \rho_2 2\pi r^3 dr = 2\pi \rho_2 \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho_2 \frac{R^4}{4}.$$

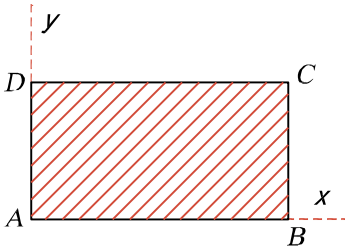


Рисунок 18.5

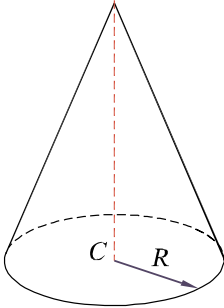


Рисунок 18.6

Замінивши  $\rho_2 = \frac{M}{\pi R^2}$ , отримаємо

$$I_{Cz} = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2 \quad (18.14)$$

**Формули моментів інерції інших однорідних тіл**

**Суцільна прямокутна пластинка з масою  $M$  та сторонами  $AB = a$ ,  $AD = b$  (Рис. 18.5)**

$$I_{Ax} = \frac{1}{3} Mb^2, I_{Ay} = \frac{1}{3} Ma^2, \quad (18.15)$$

- відносно осі розглянуто як стержень довжиною  $b$ :

$$I_{Ax} = \frac{1}{3} Mb^2; \quad (18.15)'$$

- відносно осі розглянуто стержень довжиною  $a$ :

$$I_{Ax} = \frac{1}{3} Ma^2; \quad (18.15)''$$

**б) прямий суцільний круглий конус з масою  $M$  та радіусом основи  $R$  (Рис. 18.6),**

$$I_{Cz} = 0,3MR^2, \quad (18.16)$$

**в) суцільна куля з масою  $M$  та радіусом  $R$  (Рис. 18.7),**

$$I_{Cx} = I_{Cy} = I_{Cz} = 0,4MR^2 \quad (18.17)$$

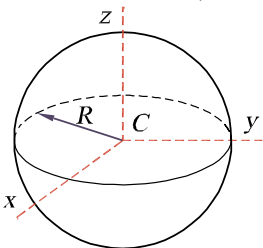


Рисунок 18.7

## Контрольні запитання

1. Що називають механічною системою?
2. Які сили називають зовнішніми, а які – внутрішніми?
3. Назвіть властивості внутрішніх сил.
4. Коли використовують поняття центра тяжіння та поняття центра мас?
5. Як визначити координати центра мас механічної системи?
6. Що називають моментом інерції механічної системи відносно точки та відносно осі?
7. Сформулюйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
8. Запишіть формули для визначення моментів інерції однорідних тіл: стержня, кільця, круглої та прямокутної пластин, суцільних конуса та кулі.
9. Як зміниться момент інерції диска, якщо зміниться його товщина?
10. Як залежить момент інерції однорідної круглої труби відносно центральної осі від довжини труби?

## Глава 19. Теорема про рух центра мас системи

### 19.1. Теорема про рух центра мас

У деяких випадках для визначення характеру руху системи (особливо твердого тіла), достатньо знати закон руху її центра мас. Щоб знайти цей закон, додамо ліві та праві частини рівнянь руху системи (18.1):

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i. \quad (19.1)$$

Перетворимо ліву частину отриманої рівності. Для цього з формули (18.2) для радіуса-вектора центра мас маємо:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = M \vec{r}_C.$$

Візьмемо від обох частин цієї рівності другу похідну за часом

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}, \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = M \vec{a}_C,$$

де  $\vec{a}_C$  – прискорення центра мас системи. Підставивши отриману залежність в рівність (19.1) та враховуючи, що

$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$ , отримаємо:

$$M \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (19.2)$$

Отже добуток маси системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на систему.

Порівнявши рівняння (19.2) з рівнянням руху матеріальної точки, теорему про рух центра мас можна сформулювати так:

**Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.**



Спроектувавши обидві частини рівності (19.2) на координатні осі, отримуємо:

$$M\dot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\dot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M\dot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

**Ці рівняння є диференціальними рівняннями руху центра мас механічної системи в проекціях на осі декартової системи координат.**

Відзначимо деякі властивості цієї теореми.

1. Теорема обґрунтовує методи динаміки точки. З рівнянь видно, що розв'язок, який ми отримуємо, вважаючи дане тіло матеріальною точкою, визначає закон руху центра мас цього тіла.

Якщо тіло рухається поступально, то його рух повністю визначається рухом центра мас. Таким чином, рух твердого тіла, що рухається поступально, можна розглядати як рух матеріальної точки, маса якої дорівнює масі тіла. В інших випадках тіло можна розглядати як матеріальну точку лише тоді, коли для визначення положення тіла достатньо знати положення його центра мас.

2. Теорема дозволяє при визначенні закону руху центра мас довільної системи виключити з розгляду всі невідомі внутрішні сили.

## 19.2. Закон збереження руху центра мас

З теореми про рух центра мас одержуємо важливі наслідки.

1. Якщо геометрична сума зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0,$$

то з рівняння (19.2) витікає, що  $\vec{a}_C = 0$  або  $\vec{v}_C = \overrightarrow{const}$ . Отже, якщо сума зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається зі сталою за модулем і напрямком швидкістю, тобто рівномірно та прямолінійно.

Зокрема, якщо спочатку центр мас перебуває у стані спокою, то він і залишиться в стані спокою. Внутрішні сили рух центра мас змінити не можуть.

2. Якщо сума проєкцій зовнішніх сил на деяку вісь наприклад, вісь  $Ox$  дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0,$$

то перше з рівнянь (19.3) дає:  $\ddot{x}_C = 0$  або  $\dot{x}_C = v_{Cx} = const$ .

**Тобто, якщо сума проєкцій зовнішніх сил на деяку вісь дорівнює нулю, то проєкція швидкості центра мас системи на цю вісь є сталою величиною.**

Зокрема, якщо в початковий момент  $v_{Cx} = 0$ , то і в будь-який інший момент  $v_{Cx} = 0$ , тобто центр мас системи не буде переміщатися вздовж осі  $Ox$ .

Ці наслідки виражають закон збереження руху центра мас системи.

Розглянемо приклади, що ілюструють використання закону збереження руху центра мас системи.

### **Рух центра мас Сонячної системи**

Сили дії зірок на Сонячну систему – зовнішні сили. Якщо їх не враховувати, то Сонячна система рухається під дією внутрішніх сил. Отже, в першому наближенні центр мас Сонячної системи в світовому просторі рухається рівномірно та прямолінійно.

### **Рух по горизонтальній площині**

За відсутності тертя ковзання людина за допомогою своїх мускульних зусиль (сили внутрішні) не змогла б рухатися вздовж горизонтальної площини, оскільки в цьому разі сума проєкцій на горизонтальну вісь  $Ox$  прикладених до людини зовнішніх сил (сила ваги та реакція площини) дорівнюють нулю й центр мас людини вздовж площини не буде переміщатися  $x_C = const$ . Якщо людина винесе праву ногу вперед, то її ліва

нога посунеться назад, а загальний центр мас залишиться нерухомим відносно осі.

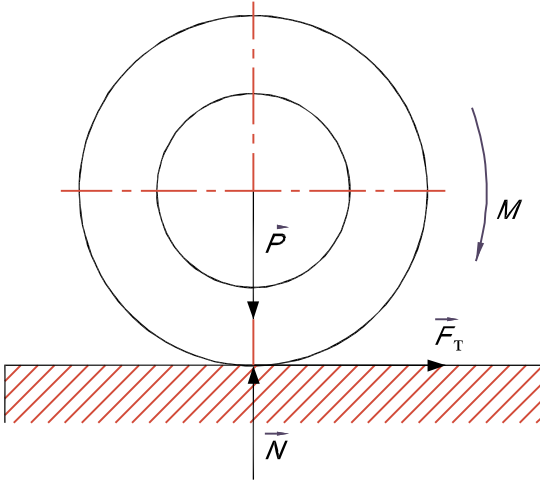


Рисунок 19.1

За наявності сил тертя ковзання руху лівої ноги назад буде завважати сила тертя, яка спрямована вперед. Ця сила й буде тією зовнішньою силою, яка переміщає людину в бік її дії. Аналогічно проходить рух автомобіля, паровоза (Рис. 19.1).

### Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему про рух центра мас системи.
2. Які наслідки випливають з теореми про рух центра мас системи?
3. У чому полягає закон збереження руху центра мас системи?
4. Як рухається центр мас Сонячної системи?
5. Як людина здійснює рух по горизонтальній площині за наявності та відсутності сил тертя ковзання?
6. Який вплив мають внутрішні сили на рух центра мас системи?

## Глава 20. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки та механічної системи

### 20.1. Міри руху

Після вивчення диференціальних рівнянь руху системи точок може видаватися, що вивчення руху матеріальної системи можна звести до складання та аналізу диференціальних рівнянь.

Узагалі ця точка зору справедлива, але практично реалізувати такий шлях дослідження вдається лише для системи, яку складає невелика кількість матеріальних точок. Складність використання диференціальних рівнянь руху полягає перш за все в тому, що нам не відомі аналітичні залежності для внутрішніх сил та реакцій в'язей.

У теоретичній механіці розробили методи, які дозволяють обійти основні труднощі, що виникають при використанні диференціальних рівнянь руху механічної системи. З цією метою введені деякі векторні та скалярні величини, що характеризують рух усієї системи (так звані міри руху). До них належать:

- вектор кількості руху;
- вектор моменту кількості руху;
- кінетична енергія;
- сила інерції та головний вектор сил інерції;
- момент сил інерції та головний момент сил інерції.

Знаючи характер зміни цих величин, можна скласти часткове, а інколи й повне уявлення про рух механічної системи.

### 20.2. Кількість руху точки та системи точок

Основними характеристиками руху матеріальної точки та механічної системи є кількість руху та кінетична енергія.

Означення кількості руху матеріальної точки як міри механічного руху наведене в главі 15 при формулюванні другого закону Ньютона, де **кількістю руху матеріальної точки було на-**

звано векторну величину, що дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості

$$\vec{q} = m\vec{v}.$$

Таким чином, вектор  $\vec{q}$  спрямований так само, як і вектор швидкості точки  $\vec{v}$ , тобто по дотичній до траєкторії руху точки.

Кількістю руху системи називають векторну величину  $\vec{Q}$ , що дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх точок системи (Рис. 20.1):

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k. \quad (20.1)$$

З рис 20.1 видно, що незалежно від величин швидкостей точок системи, вектор  $\vec{Q}$  може приймати довільні значення, а також дорівнювати нулю, коли многокутник, побудований із векторів

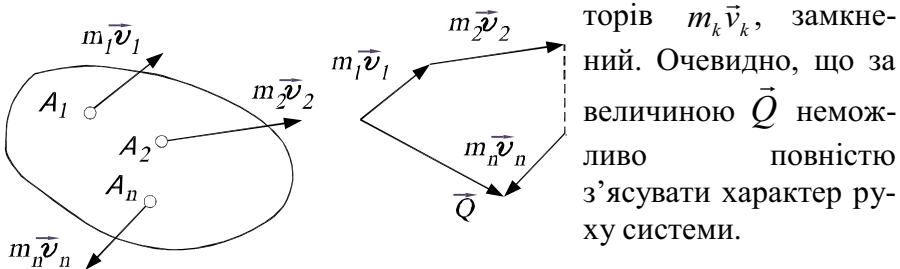


Рисунок 20.1

Знайдемо формулу, за допомогою якої значно легше обчислити величину  $\vec{Q}$ , а також з'ясувати її суть.

З формули, яка визначає положення центра мас його радіусом-вектором, маємо

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C. \quad (20.2)$$

Візьмемо похідну за часом від обох частин рівності (20.2).

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = M \frac{d\vec{r}_C}{dt}$$

або

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = M \vec{v}_C.$$

Звідси витікає, що

$$\vec{Q} = M \vec{v}_C, \quad (20.3)$$

тобто **кількість руху системи дорівнює добутку маси всієї системи точок  $M$  на вектор швидкості її центра мас  $\vec{v}_C$ .**

Рівність (20.3) можна трактувати так: **кількість руху механічної системи дорівнює кількості руху її центра мас, якщо масу всієї системи зосередити в центрі мас.**

Одиницею вимірювання кількості руху в SI є  $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$  або  $\text{Н} \cdot \text{с}$ .

Вектор кількості руху  $\vec{Q}$  може бути заданий своїми проекціями, формули для яких отримуємо з (20.1) та (20.3) і теореми про проекції суми векторів:

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = M v_{Cx}; \\ Q_y &= \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = M v_{Cy}; \\ Q_z &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = M v_{Cz}. \end{aligned} \quad (20.4)$$

**Задача 20.1.** Однорідний циліндр масою  $m = 20 \text{ кг}$  котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю  $v_C = 2 \text{ м}/\text{с}$ . Визначити кількість руху циліндра.

### Розв'язок

Кількості руху окремих точок циліндра мають різні напрямки. Головний вектор кількості руху циліндра  $\vec{Q}$  збігається за на-

прямою зі швидкістю центра мас циліндра, а його модуль дорівнює

$$Q = mv_c = 40 \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 40 \text{ Нс}.$$

### 20.3. Імпульс сили

Для характеристики дії сили на тіло за деякий проміжок часу використовують поняття імпульсу сили. Спочатку розглянемо елементарний імпульс сили, тобто імпульс сили за нескінченно малий проміжок часу  $dt$ .

Елементарним імпульсом сили називають векторну величину  $d\vec{S}$ , яка дорівнює добутку вектора сили  $\vec{F}$  на елементарний проміжок часу  $dt$ :

$$d\vec{S} = \vec{F} dt. \quad (20.5)$$

Елементарний імпульс сили спрямований по лінії дії сили.

Імпульс сили за довільний проміжок часу  $[0, t_1]$  дорівнює означеному інтегралу від елементарного імпульсу, взятому в границях від нуля до  $t_1$ :

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt. \quad (20.6)$$

Якщо сила  $\vec{F}$  постійна за величиною та напрямом ( $\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$ ), то імпульс сили дорівнює  $\vec{S} = \vec{F}t_1$ , а модуль імпульсу сили –  $S = Ft_1$ .

Проекція імпульсу сили на осі координат, ураховуючи те, що інтеграл є границею суми, а проекція суми векторів на вісь дорівнює сумі проєкцій складових векторів на цю ж вісь, дорівнює:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \quad (20.7)$$

Використовуючи проєкції вектора імпульсу сили на осі, можна побудувати вектор  $\vec{S}$ , знайти його модуль, а також кути з осями координат.

Одиницями вимірювання імпульсу сили в СИ є  $[\text{Н} \cdot \text{с}]$ .

Для розв'язку основної задачі динаміки важливо виділити ті сили, імпульси яких можливо вирахувати наперед, не знаючи закону руху точки під дією цих сил. Із рівності (20.7) видно, що до таких належать лише сталі сили та сили, які залежать від часу.

Для визначення імпульсів сил, залежних від координат або швидкостей руху точки, необхідно додатково знати закон руху точки, тобто рівняння руху точки

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Виразивши  $x, y, z$  або  $v_x, v_y, v_z$  через час  $t$ , можна вирахувати інтеграли (20.7). Якщо закон руху точки невідомий, імпульси таких сил вирахувати неможливо.

#### 20.4. Теорема про зміну кількості руху точки

Якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то другий закон Ньютона можна записати так:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (20.8)$$

Нехай точка масою  $m$  рухається під дією сили  $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$

(Рис. 20.2) та має в момент часу  $t = 0$  швидкість  $\vec{v}_0$ , а в момент часу  $t$  – швидкість  $\vec{v}$ . Тоді, помноживши обидві частини рівності (20.8) на  $dt$  та проінтегрувавши їх, отримаємо



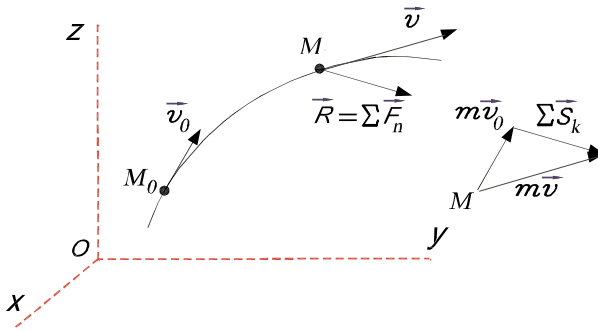


Рисунок 20.2

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d(m\vec{v}) = \int_0^t \sum_{k=1}^n \vec{F}_k dt$$

або

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum_{k=1}^n \int_0^t \vec{F}_k dt.$$

Права частина отриманої залежності є геометричною сумою імпульсів сил, а тому можна записати:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k. \quad (20.9)$$

Рівняння (20.9) виражає теорему про зміну кількості руху точки в інтегральній формі: **зміна кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, які діють на точку за той самий проміжок часу.**

Зауважимо, що залежність (20.9) є наслідком з другого закону Ньютона, який, у цьому разі, можна трактувати як теорему про зміну кількості руху в диференціальній формі. Проте завжди слід пам'ятати, що другий закон Ньютона є первинним і на ньому ґрунтуються доведення всіх теорем динаміки матеріальної точки в інерціальній системі відліку.

Для розв'язку задач часто використовують проекції рівності (20.9) на осі декартової системи координат:

$$\begin{cases} mv_x - mv_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}; \\ mv_y - mv_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}; \\ mv_z - mv_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}. \end{cases} \quad (20.10)$$

Якщо сили, що діють на точку, сталі, тобто

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = A_1, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = A_2, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = A_3,$$

то

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = A_1 t, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = A_2 t, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = A_3 t. \quad (20.11)$$

Після інтегрування (20.11) в границях від 0 до  $t$  отримаємо

$$\begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{A_1 t^2}{2m}; \\ y = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{A_2 t^2}{2m}; \\ z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{A_3 t^2}{2m}, \end{cases} \quad (20.12)$$

де  $x_0, y_0, z_0$  – початкові значення координат у момент часу  $t = 0$ . У випадку прямолінійного руху, що проходить вздовж осі  $Ox$ , рух точки описують першим з цих рівнянь.

**Задача 20.2.** Визначити проміжок часу  $T$ , необхідний для того, щоб точка вагою  $\vec{G}$ , що рухається по горизонтальній прямій під дією сталої сили  $\vec{F}$ , збільшила свою початкову швидкість  $v_0$  в  $n$  разів.

### Розв'язок

Прийmemo пряму, вздовж якої рухається точка, за вісь  $Ox$ . Тоді на основі (20.11) будемо мати

$$\frac{G}{g}(nv_0 - v_0) = FT,$$

звідси

$$T = \frac{Gv_0}{Fg}(n-1).$$

## 20.5. Теорема про зміну кількості руху системи точок

**Теорема.** Похідна за часом від вектора кількості руху системи матеріальних точок дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, що діють на систему.

Для доведення теореми запишемо диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок у такій формі:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i; \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i; \\ \dots\dots\dots \\ m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{cases} \quad (20.13)$$

Почленно додамо всі рівняння:

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i.$$

Другий доданок у правій частині отриманого рівняння, з урахуванням властивостей внутрішніх сил, дорівнює нулю. Після перетворення лівої частини маємо:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e,$$

або, враховуючи рівність (20.1),

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (20.14)$$

Отже теорему доведено.

Проекції (20.14) на осі  $Ox, Oy, Oz$  мають вигляд:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \quad (20.15)$$

Використовуючи раніше введене поняття імпульсу сили, запишемо теорему в іншому вигляді.

Кількість руху системи для  $t = 0$  дорівнює  $\vec{Q}_0$ , для  $t = t_1$  –  $\vec{Q}_1$ . Тоді, помноживши обидві частини рівності (20.14) на  $dt$  і проінтегрувавши, отримаємо:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e dt,$$

або

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e. \quad (20.16)$$

Рівність (20.16) виражає теорему про зміну кількості руху системи в інтегральній формі.

**Зміна кількості руху системи за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів зовнішніх сил, які діють на систему за той самий проміжок часу.**

Векторне рівняння (20.16) еквівалентне трьом скалярним рівностям, що відповідають проекціям рівняння (20.16) на осі інерційної системи координат:

$$\begin{cases} Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e; \\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e; \\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \end{cases} \quad (20.17)$$

Покажемо зв'язок між доведеною теоремою та теоремою про рух центра мас системи. Якщо  $\vec{Q} = M\vec{v}_C$ , то підставивши це зна-

чення в (20.14) і врахувавши, що  $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{a}_C$ , отримаємо

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e, \text{ тобто вираз теореми про рух центра мас системи.}$$

Таким чином, теорема про рух центра мас системи та теорема про зміну кількості руху системи є двома різними формами однієї й тієї ж теореми. Для вивчення руху твердого тіла, можна рівнозначно використовувати будь-яку з цих форм.

Але для неперервного середовища (рідина, газ) поняття про центр мас усієї системи практично втрачає сенс. Тоді для розв'язку задач користуються теоремою про зміну кількості руху системи.

Практична цінність теореми полягає в тому, що вона дає змогу виключити із розгляду наперед невідомі внутрішні сили.

## 20.6. Закон збереження кількості руху

З теореми про зміну кількості руху системи точок можна отримати важливі наслідки.

**Наслідок 1.** Якщо сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему дорівнює нулю  $\left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0\right)$ , тоді з рівняння (20.14) випливає, що  $\vec{Q} = \overline{const}$ .

Таким чином: якщо сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то вектор кількості руху системи сталий.

**Наслідок 2.** Якщо сума проєкцій зовнішніх сил, що діють на систему точок, на яку-небудь вісь дорівнює нулю  $\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0\right)$ ,

то із рівняння (20.15) випливає, що  $Q_x = const$ . Отже, якщо сума проєкцій зовнішніх сил, що діють на систему точок, на яку-небудь з осей дорівнює нулю, то проєкція головного вектора кількості руху системи на цю вісь величина стала.

Ці наслідки відображають закон збереження кількості руху системи. З них випливає, що внутрішні сили не можуть змінити кількість руху системи. Розглянемо деякі приклади.

### **Явище віддачі або відкату**

Якщо розглядати гвинтівку та кулю як одну систему, то дія порохових газів при пострілі є внутрішньою силою. Ця сила не змінює сумарну кількість руху системи. Коли порохові гази, діючи на кулю, надають їй деяку кількість руху, направлену вперед, то вони одночасно повинні надати гвинтівці таку ж кількість руху в зворотному напрямку. Гвинтівка буде рухатись у бік, протилежний до руху кулі.

### **Реактивна тяга**

У ракеті продукти горіння палива з великою швидкістю викидаються із сопла ракетного двигуна. Сили, які діють при цьому, є внутрішніми силами та не змінюють сумарну кількість руху системи ракета–продукти горіння палива. Оскільки гази, що викидаються із сопла реактивного двигуна, мають певну кількість руху, то ракета отримує при цьому відповідну кількість руху, яка направлена в бік, протилежний до напрямку руху газу.

Слід відмітити, що гвинтовий двигун надає літаку рух за рахунок відкидання назад частин повітря. У безповітряному просторі такий рух неможливий. Реактивний двигун надає рух за рахунок відкидання назад мас, що виробляються в самому двигуні. Цей рух можливий як в повітряному, так і в безповітряному просторах.

## **20.7. Теорема Ейлера**

Теорему про зміну кількості руху системи в диференціальній формі використовують у механіці суцільного середовища.

Деяка рідина або газ рухається в трубі зі змінним перерізом. Виділимо частину труби об'ємом  $W$  (Рис. 20.3).

Цей об'єм обмежений бічною поверхнею труби та двома поперечними перерізами з площами  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ .

Позначимо через  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  та  $\bar{v}$  середні швидкості частин середовища, що протікають через відповідні перерізи. Тоді за одиницю часу через перерізи  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma$  будуть протікати маси  $\rho_1\sigma_1v_1$ ,  $\rho_2\sigma_2v_2$ ,  $\rho\sigma v$  де  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho$  – густина середовища у відповідному перерізі.

Будемо вважати, що швидкості окремих часток середовища та їх густина в кожному перерізі не змінюється з часом. Звідси випливає, що через кожний переріз за одиницю часу будуть протікати однакові кількості маси рідини, або газу, тобто

$$M_c = \rho_1\sigma_1v_1 = \rho_2\sigma_2v_2 = \rho\sigma v, \quad (20.18)$$

де  $M_c$  – секундна маса (маса рідини або газу, що протікає через довільний переріз труби за одиницю часу). Розмірність секундної маси в SI [кг/с].

Обчислимо зміну кількості руху рідини або газу, що заповнює об'єм  $W$ . Нехай в момент часу  $t$  рідина або газ займали об'єм  $W$ , який розміщений між перерізами  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ , та в момент часу  $t + dt$  – займають об'єм, що розміщений між перерізами  $\sigma'_1$  та  $\sigma'_2$ . Оскільки через довільний переріз проходять однакові маси  $M_c$  то за час  $dt$  через перерізи  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  пройдуть маси  $M_c dt$ . Кількості руху їх будуть  $M_c dt \bar{v}_1$ ,  $M_c dt \bar{v}_2$ , а зміна кількості руху  $d\bar{Q}$  рідини або газу за той  $dt$  проміжок часу визначиться рівністю

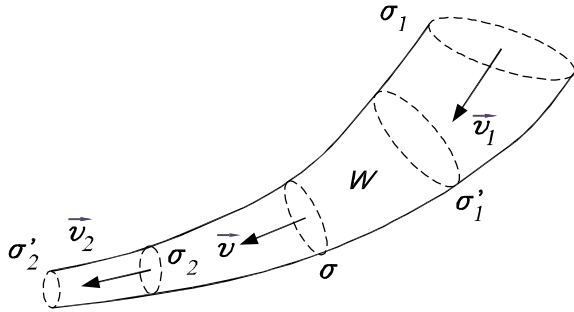


Рисунок 20.3

$$d\vec{Q} = M_C dt \vec{v}_2 - M_C dt \vec{v}_1.$$

Звідси 
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M_C \vec{v}_2 - M_C \vec{v}_1. \quad (20.19)$$

У формулі (20.19) величини  $M_C \vec{v}_1$  та  $M_C \vec{v}_2$  називають секундними кількостями руху рідини або газу в перерізах  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ .

Зовнішні сили, що діють на суцільне середовище, можна розділити на дві категорії:

1) масові сили або об'ємні (сили ваги), головний вектор яких позначимо  $\vec{F}_{об}$ ;

2) поверхневі сили (сили тиску стінок на середовище, сили тертя виділеного об'єму середовища до стінки). Головний вектор поверхневих сил позначимо  $\vec{F}_{пов}$ .

Застосувавши до маси середовища теорему про зміну кількості руху матеріальної системи в диференціальній формі (20.14), отримаємо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = \vec{F}_{об} + \vec{F}_{пов},$$

або, використавши (20.19), запишемо:

$$\vec{F}_{об} + \vec{F}_{пов} + M_C \vec{v}_1 - M_C \vec{v}_2 = 0. \quad (20.20)$$

Залежність (20.20) виражає теорему Ейлера: **сума головних векторів об'ємних та поверхневих сил, а також секундних кількостей руху середовища, що протікає через два поперечних перерізи труби, дорівнює нулю, якщо вектори секундних кількостей руху спрямувати в середину виділеного перерізу об'єму.**

У проєкціях на осі координат рівність (20.20) має вигляд:



$$\begin{cases} X_{об} + X_{пов} + M_C v_{1x} - M_C v_{2x} = 0; \\ Y_{об} + Y_{пов} + M_C v_{1y} - M_C v_{2y} = 0; \\ Z_{об} + Z_{пов} + M_C v_{1z} - M_C v_{2z} = 0. \end{cases} \quad (20.21)$$

**Задача 20.3.** Визначити тиск на опору  $A$  коліна труби діаметром 20 см, який викликаний рухом води. Вісь труби розміщена в горизонтальній площині. По трубі тече вода зі швидкістю 4 м/с, вектор швидкості води при вході в трубу утворює кут  $60^\circ$  з вектором швидкості при виході із труби.

### Розв'язок

Розглянемо зігнуту частину труби та позначимо через  $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$  вектори швидкостей води, а площі поперечного перерізу при вході та виході через  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ . Осі координат виберемо так, як показано на рис. 20.4. За умовою  $v_1 = v_2 = v$ , а також  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \pi R^2$ .

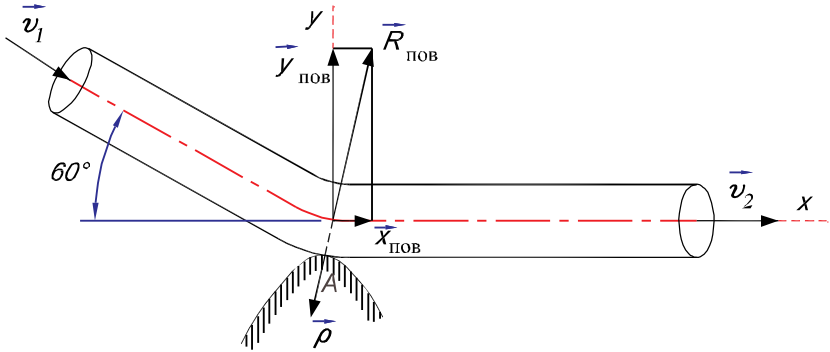
Сили ваги спрямовані вертикально та їх проекції на осі координат дорівнюють нулю. Позначимо через  $\vec{X}_{нов}$  та  $\vec{Y}_{нов}$  проекції головного вектора сил тиску стінок трубопроводу на воду та запишемо перші два рівняння (20.21)

$$X_{нов} + M_C v_1 \cos 60^\circ - M_C v_2 = 0, \quad Y_{нов} - M_C v_1 \sin 60^\circ = 0.$$

Звідси

$$X_{нов} = M_C v (1 - \cos 60^\circ), \quad Y_{нов} = M_C v \sin 60^\circ,$$

$$R_{нов} = \sqrt{X_{нов}^2 + Y_{нов}^2} = M_C v \sqrt{0,5^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = M_C v.$$



**Рисунок 20.4**

Таким чином, головний вектор поверхневих сил направлений по діагоналі паралелограма, побудованого на силах  $\vec{X}_{нов}$  та  $\vec{Y}_{нов}$  як на сторонах.

Сила  $\vec{P}$  динамічного тиску на опору  $A$  дорівнює за модулем  $\vec{R}_{нов}$  і спрямована в протилежний бік:

$$P = M_C v. \quad (20.22)$$

Згідно з формулою (20.18)

$$M_C = \rho \sigma v = \frac{\gamma}{g} \pi R^2 v, \text{ де } \rho = \frac{\gamma}{g}.$$

Підставивши в формулу (20.22) ці величини, отримаємо

$$P = \frac{\gamma}{g} \pi R^2 v^2 = \frac{1000}{9,81} \cdot 3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 4^2 \approx 572 \text{ Н.}$$

## 20.8 Рух тіла із змінною масою. Реактивний рух.

В класичній механіці маса кожної точки або часток системи при русі вважається величиною постійною.

Проте, у природі і техніці часто зустрічаються тіла, маса яких змінюється в процесі їх руху (літаки, ракети, автомобілі, земля). У цьому параграфі буде розглянутий практично важливий випадок, коли процес зміни маси відбувається безперервно.

**Тіло, маса якого безперервно змінюється з часом внаслідок приєднання до нього або відділення від нього матеріальних часток, називається тілом змінної маси.**

Для тіла змінної маси  $M=F(t)=f(t)$ , де  $F(t)$  – безперервна функція часу. **Коли таке тіло рухається поступально, то його можна розглядати як точку змінної маси.**

Знайдемо рівняння руху тіла, маса якого безперервно убиває з часом, на прикладі руху ракети, вважаючи її точкою змінної маси. Позначимо відносно (по відношенню до корпусу ракети) швидкість витікання продуктів горіння з ракети через  $\bar{u}$ , щоб виключити сили тиску, що виштовхують продукти горіння, зробивши ці сили внутрішніми, розглянемо в деякий момент часу  $t$  систему, яка складається з самої ракети і частки, що відділяється від неї впродовж часу  $dt$  (Рис. 20.5).

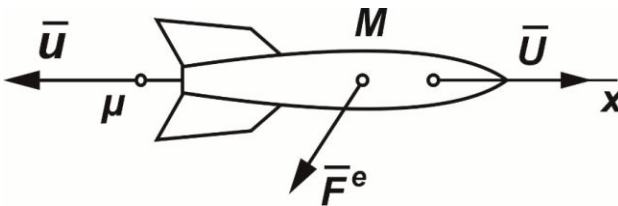


Рисунок 20.5

Маса цієї частки чисельно дорівнює величині  $dM$ , на яку за час  $dt$  змінюється маса ракети. Оскільки  $M$  – величина яка убиває, то  $dM < 0$ , і отже  $\mu = |dM| = -dM$ .

Рівняння (20.14) для даної системи можна представити у вигляді:

$$d\bar{Q} = \bar{F}^e dt, \quad (20.23)$$

де  $\bar{F}^e$  – геометрична сума прикладених до ракети зовнішніх сил.

Якщо швидкість  $\bar{v}$  ракети за час  $dt$  змінюється на величину  $d\bar{v}$ , то кількість руху даної системи отримує при цьому приріст  $M d\bar{v}$ . Частка, що відділяється, за той же час отримує додаткову швидкість  $\bar{u}$ . Отже, за час  $dt$  кількість руху частки зміниться на величину  $\bar{u} dm = -\bar{u} dM$ , а для усієї системи вийде  $d\bar{Q} = M d\bar{v} - \bar{u} dM$ . Підставляючи це значення  $d\bar{Q}$  в рівність (20.23) і поділивши обидві його частки на  $dt$ , отримуємо остаточно:

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^e + \bar{u} \frac{d\bar{M}}{dt}. \quad (20.24)$$

Рівняння (20.24) у векторній формі є **диференціальне рівняння руху точки змінної маси, яке називається рівнянням Мещерського<sup>1</sup>**.

Враховуючи, що останній доданок в (20.24) по розмірності являється силою, і означаючи його через  $\bar{\Phi}$ , ми можемо рівняння (20.24) представити у вигляді

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^e + \bar{\Phi}. \quad (20.25)$$

---

<sup>1</sup> Мещерський І.В. (1859-1935) – видатний російський вчений-механік. Рівняння (20.24) дано в роботі 1897 р. Див. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы, изд.2-е, Гостехиздат, 1952.

Таким чином, реактивний ефект зводиться до того, що на ракету при її русі додатково діє сила  $\bar{\Phi}$ , яка називається **реактивною силою**.

Величина  $\frac{d\bar{M}}{dt}$  чисельно дорівнює масі палива, яке витрачається за одиницю часу, т.п. секундній витраті маси палива  $G_{\text{сек}}$ . Таким чином, якщо врахувати знак, то  $\frac{d\bar{M}}{dt} = -G_{\text{сек}}$ . Звідси витікає, що  $\bar{\Phi} = -\bar{u} \cdot G_{\text{сек}}$ , т.е. реактивна сила дорівнює множенню секундної витрати маси палива на відносну швидкість витікання продуктів його згорання і **напрявлена протилежно цієї швидкості**.

### Формула Ціолковського<sup>2</sup>.

Знайдемо, як відбувається рух ракети під дією тільки однієї реактивної сили, рахуючи  $\bar{F}^e = 0$ , а відносну швидкість витікання  $\bar{u}$  постійною. Направимо координатну вісь  $x$  у бік руху (Рис.20.5). Тоді  $v_x = v$ ,  $u_x = u$  і рівняння (20.24) в проекції на вісь  $x$ , якщо в ньому покласти  $\bar{F}^e = 0$ , набере вигляду:

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \quad \text{або} \quad dv = -u \frac{dm}{M}.$$

Інтегруючи це рівняння і вважаючи, що в початковий момент маса  $M = M_0$ , а швидкість  $v = v_0$  і спрямована уздовж осі  $Ox$ , отримаємо

$$v = v_0 + u \cdot \ln \frac{M_0}{M} \quad (20.27)$$

Позначимо масу корпусу ракет из усім устаткуванням через  $M_k$ , а усю масу палива через  $M_T$ . Тоді, очевидно,  $M_0 = M_k + M_T$ .

<sup>2</sup> Ціолковський К.Е. (1857-1935) - видатний російський вчений та винахідник. Робота, в котрій дана формула (20.28), була опублікована в травні 1903 р. в журналі «Научное обозрение».

Підставляючи ці значення в рівність (20.27), отримаємо **формулу Ціолковського**, яка визначає швидкість ракети, коли усе паливо витрачено (швидкість у кінці активної ділянки):

$$v_I = v_0 + u \cdot \ln\left(1 + \frac{M_T}{M_K}\right). \quad (20.28)$$

Строго цей результат справедливий у безповітряному просторі і поза полем сил тяжіння. З формули (20.28) видно, що гранична швидкість ракети залежить:

- 1) від її початкової швидкості  $\bar{v}_0$ ;
- 2) від відносної швидкості витікання (вильоту) продуктів згорання  $\bar{u}$ ;
- 3) від відносного запасу палива  $z = M_T/M_K$  (**число Ціолковського**).

Дуже цікавий той факт, що від режиму роботи ракетного двигуна швидкість ракети у кінці періоду горіння не залежить.

Важливе практичне значення формули Ціолковського є у тому, що вона вказує можливі шляхи отримання великих швидкостей, необхідних для космічних польотів. Цими шляхами є збільшення  $M_T/M_K$ ,  $\bar{u}$  і  $\bar{v}_0$ , причому шлях збільшення  $\bar{u}$  і  $\bar{v}_0$  ефективніший. Збільшення  $\bar{u}$  і  $M_T/M_K$  пов'язане з видом палива і конструкцією ракети. Вживання рідкого палива дозволяє отримати  $u=3000/4500$  м/с. Але значення  $M_T/M_K$  у одноступінчатих ракет такі, що вони не дають швидкостей, необхідних для космічних польотів. Отримати необхідну швидкість можна шляхом використання багатоступінчастої ракети, частини якої по мірі витрачання палива автоматично відділяються від останнього ступеня, в результаті чого виникає додаткова (початкова) швидкість.

Подібна багатоступінчаста ракета була застосована для запуску перших у світі радянських штучних супутників Землі (4 жовтня і 3 листопада 1957 р.), а також при численних пусках ін-

ших космічних об'єктів, у тому числі кораблів, на яких здійснюють свої польоти космонавти.

**Формула Ціолковського для багатоступінчастої ракети** має вигляд (при  $v_0 = 0$ ):

$$v = u_1 \ln z_1 + u_2 \ln z_2 + \dots + u_n \ln z_n, \quad (20.29)$$

де  $u_n$  - відносна швидкість витікання продуктів горіння з  $n$ -й ступені;

$z_n$  - число Ціолковського для  $n$ -й ступені.

#### **Задача 20.4**

Відносна швидкість витікання газів з ракети  $u \approx 400$  м/с. Скільки відсотків повинна складати маса палива  $M_T$  від стартової маси ракети  $M_K$ , щоб ракета набула швидкість  $v \approx 9000$  м/с? (Ракета переміщується поза полем тяжіння і поза атмосфери  $v_0 = 0$ ).

#### **Розв'язок**

З формули (20.28) визначимо ( $v_0 = 0$ ):

$$v_1 = u \ln\left(1 + \frac{M_T}{M_K}\right); \quad \ln\left(1 + \frac{M_T}{M_K}\right) = \frac{v_1}{u} = \frac{9000}{2400} = 3,75.$$

Звідки

$$1 + \frac{M_T}{M_K} = e^{3,75} = 42,51 \quad \text{або} \quad \frac{M_T}{M_K} = 41,51.$$

Це означає, що  $M_T = 41,5M_K$ , т.ч. маса палива повинна складати приблизно 98% від стартової маси ракети.

#### **Контрольні запитання**

1. Які величини називають кількістю руху матеріальної точки та механічної системи?
2. Що називають елементарним імпульсом сили та імпульсом сили?

3. Запишіть теорему про зміну кількості руху точки та механічної системи в диференціальній та інтегральній формі.
4. Сформулюйте закон збереження кількості руху системи.
5. Поясніть явище віддачі під час вистрілу.
6. Запишіть теорему Ейлера у векторній формі та в проєкціях на осі декартової системи координат.
7. Що називають тілом змінної маси?
8. Запишіть формулу Мещерського.
9. Запишіть формулу Ціолковського.
10. Як визначається реактивна сила?
11. Що називають числом Ціолковського?
12. Від чого залежить гранична швидкість ракети?
13. Коли був запущен перший штучний супутник Землі?



## Глава 21. Теорема про зміну моменту кількості руху точки та системи

### 21.1. Момент кількості руху точки.

#### Головний момент кількості руху системи

Іноді при вивченні руху точки замість зміни кількості руху  $m\vec{v}$  виникає необхідність розглядати зміну моменту кількості руху.

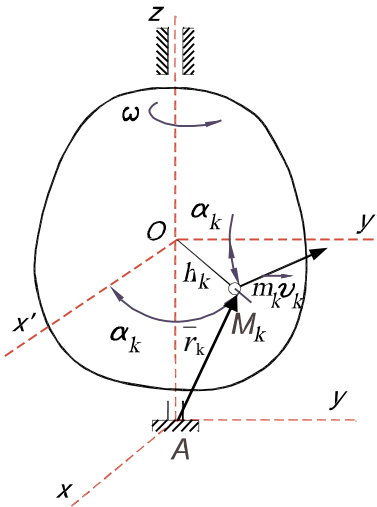


Рисунок 21.1

Момент вектора кількості руху точки  $m\vec{v}$  відносно даного центра  $O$  або осі  $Oz$  позначають  $\vec{m}_O(m\vec{v})$  або  $m_{Oz}(m\vec{v})$  і називають відповідно моментом кількості руху або кінетичним моментом точки відносно центра (осі).

Обчислюють момент вектора  $m_k \vec{v}_k$  так само, як і момент сили.

При цьому вектор  $m_k \vec{v}_k$  вважають прикладеним до рухомої точки  $M_k$  (Рис. 21.1). За модулем  $|\vec{m}_O(m_k \vec{v}_k)| = m_k v_k h_k$ , де  $h_k$  – довжина перпендикуляра, опущеного із центра  $O$  на напрямок вектора  $m_k \vec{v}_k$ .

Уведемо поняття моменту кількості руху для системи матеріальних точок.

Уведемо поняття моменту кількості руху для системи матеріальних точок.

Головним моментом кількості руху (або кінетичним моментом) системи відносно даного центра  $O$  називають векторну величину  $\vec{K}_O$ , що дорівнює геометричній сумі моментів кількості руху всіх точок системи відносно цього центра

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(m_k \vec{v}_k). \quad (21.1)$$

Аналогічно визначають момент кількості руху системи відносно координатних осей:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{k=1}^n m_x (m_k \vec{v}_k), \\ K_y &= \sum_{k=1}^n m_y (m_k \vec{v}_k), \\ K_z &= \sum_{k=1}^n m_z (m_k \vec{v}_k). \end{aligned} \quad (21.2)$$

Визначимо момент кількості руху точки та системи у векторній формі. Вектор  $\vec{k}_O = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$  називають **моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра  $O$** . Тоді **кінетичний момент системи відносно центра  $O$**

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{k}_{Ok} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k).$$

Кількість руху системи характеризує поступальний рух, головний момент кількості руху системи характеризує обертальний рух системи.

Щоб з'ясувати механічну суть величини  $\vec{K}_O$  і мати необхідні формули для розв'язку задач, знайдемо кінетичний момент тіла, яке обертається навколо нерухомої осі (Рис. 21.1).

Визначення вектора кінетичного моменту зводять до визначення його проєкцій  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ . Запишемо кінетичний момент тіла  $K_z$  відносно осі обертання. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . Для довільної точки тіла, віддаленої від осі обертання на відстань  $h_k$ , швидкість дорівнює  $v_k = \omega h_k$ . Кінетичний момент для цієї точки

$$m_z (m_k \vec{v}_k) = m_k v_k h_k = m_k \omega h_k^2.$$

Для всього тіла одержимо

$$K_z = \sum_{k=1}^n m_k (m_k \vec{v}_k) = \left( \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \right) \omega.$$

Величина в дужках є моментом інерції тіла відносно осі  $Oz$ . Таким чином

$$K_z = I_z \omega. \quad (21.3)$$

Отже, кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно тієї ж осі на кутову швидкість обертання тіла.

Якщо систему складають декілька тіл, що обертаються навколо однієї і тієї ж осі  $Oz$ , то

$$K_z = I_{1z} \omega_1 + I_{2z} \omega_2 + \dots + I_{nz} \omega_n. \quad (21.4)$$

Можна зауважити аналогію між формулами для визначення кількості руху та моменту кількості руху: кількість руху дорівнює добутку маси (величина, що характеризує інертність тіла при поступальному русі) на швидкість; кінетичний момент дорівнює добутку моменту інерції (величина, що характеризує інертність тіла при обертальному русі) на кутову швидкість.

У разі плоского руху тіло здійснює обертальний рух відносно осі, що перпендикулярна до площини руху та проходить через миттєвий центр швидкостей. Тоді кінетичний момент тіла  $K_{Pz} = I_{Pz} \omega$ , де  $I_{Pz}$  – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей. За теоремою Гюйгенса  $I_{Pz} = I_{Cz} + Md^2$ , де  $I_{Cz}$  – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла;  $d$  – відстань між осями  $Pz$  та  $Cz$ . Таким чином, кінетичний момент тіла при плоскому русі дорівнює:

$$K_{Pz} = (I_{Cz} + Md^2) \omega = K_{Cz} + Mv_C d = K_{Cz} + m_{Pz} (M\vec{v}_C), \quad (21.5)$$

де  $\vec{v}_C$  – швидкість центра мас тіла.

## 21.2. Теорема про зміну моменту кількості руху точки (Теорема моментів)

### Теорема моментів відносно осі

Розглянемо матеріальну точку масою  $m$ , що рухається під дією сили  $\vec{F}$ . Знайдемо для точки залежність між моментами векторів  $m\vec{v}$  і  $\vec{F}$  відносно деякої осі  $Oz$ . Запишемо формулу для моменту сили відносно осі  $Oz$

$$m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \quad (21.6)$$

Аналогічно 
$$m_z(m\vec{v}) = m(xv_y - yv_x), \quad (21.7)$$

де  $m$  винесено за дужки.

Від обох частин рівності (21.7) візьмемо похідну по часу:

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\vec{v})] = m \left[ \left( \frac{dx}{dt} v_y - \frac{dy}{dt} v_x \right) + \left( x \frac{dv_y}{dt} - y \frac{dv_x}{dt} \right) \right].$$

У правій частині вираз у перших дужках дорівнює нулю, так як  $\frac{dx}{dt} = v_x$ ,  $\frac{dy}{dt} = v_y$ . Вираз в інших дужках відповідно до формули (21.6) дорівнює  $m_z(\vec{F})$ , оскільки

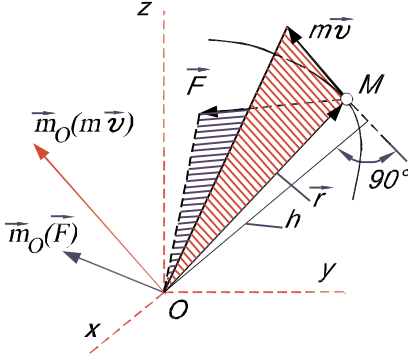
$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y \quad \text{і} \quad m \frac{dv_x}{dt} = F_x.$$

Отже 
$$\frac{d}{dt}[m_z(m\vec{v})] = m_z(\vec{F}). \quad (21.8)$$

Отримане рівняння виражає **теорему моментів відносно осі: похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно осі дорівнює моменту сили, що діє на точку, відносно тієї ж осі.**

### Теорема моментів відносно центра

**Теорема.** Похідна за часом від вектора моменту кількості руху точки, який визначений відносно довільного центра, дорівнює векторному моменту сили, яка діє на точку, відносно того ж центра.



Знайдемо для матеріальної точки, що рухається під дією сили  $\vec{F}$ , залежність між моментами векторів  $m\vec{v}$  та  $\vec{F}$  відносно довільного центра  $O$ .

Оскільки  $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$  (Рис. 21.2), то

$$\vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (21.9)$$

**Рисунок 21.2**

При цьому вектор  $\vec{m}_O(\vec{F})$  спрямований перпендикулярно до площини, що проходить через точку  $O$  та вектор сили  $\vec{F}$ , а вектор  $\vec{m}_O(m\vec{v})$  – перпендикулярний до площини, що проходить через точку  $O$  та вектор  $m\vec{v}$ .

Продиференціювавши (21.9) за часом, маємо:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left( \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right) = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

оскільки  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$  (векторний добуток паралельних векторів); а  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$ .

Тоді

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

або 
$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_O(m\vec{v})] = m_O(\vec{F}). \quad (21.10)$$

Теорема моментів відносно центра доведена.

### 21.3. Рух точки під дією центральної сили. Закон площ (Закон Кеплера)

Центральною називають силу, лінія дії якої проходить через заданий центр  $O$ . Прикладом такої сили є сила тяжіння планети до Сонця або супутника Землі до Землі.

Використовуючи рівняння (21.10), розглянемо рух точки  $M$  під дією центральної сили  $\vec{F}$  (Рис. 21.3). Оскільки в даному випадку  $m_O(\vec{F}) = 0$ , то  $\vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const}$ , або  $\vec{r} \times \vec{v} = \text{const}$ , ( $m = \text{const}$ ), тобто вектор  $\vec{m}_O(\vec{v})$  сталий за модулем і за напрямком. Але вектор  $\vec{m}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}$  перпендикулярний до площини, в якій розміщені вектори  $\vec{r}$  та  $\vec{v}$ .

Отже, якщо вектор  $\vec{r} \times \vec{v}$  має весь час сталий напрямок, то радіус-вектор  $\vec{r} = \overline{OM}$  та вектор швидкості  $\vec{v}$  будуть розміщені весь час в одній і тій самій площині.

Звідси можна зробити висновок, що траєкторія точки  $M$  буде плоскою кривою і

$$|\vec{m}_O(\vec{v})| = v h = \text{const}.$$

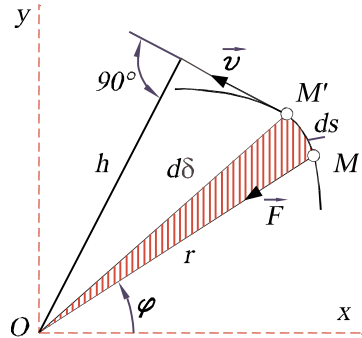


Рисунок 21.3

Отриманий результат має очевидне геометричне пояснення.

Оскільки  $vh = \frac{ds}{dt}h$ , а  $ds \cdot h = 2S_{\Delta OMM'} = 2d\delta$ , де  $d\delta$  – площа елементарного трикутника  $OOM'$ , то

$$vh = 2 \frac{d\delta}{dt}.$$

Величина  $\frac{d\delta}{dt}$  визначає швидкість зміни площі, утвореної радіусом–вектором  $\overrightarrow{OM}$  під час руху точки  $M$ , і її називають **секторною швидкістю точки**. У розглянутому випадку ця швидкість стала

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{2} (m_o(\vec{v})) = const. \quad (21.11)$$

**Отже, під дією центральної сили точка рухається по плоскій кривій з постійною секторною швидкістю, тобто так, що радіус–вектор точки за однакові проміжки часу описує однакові площі.**

Цей закон має місце під час руху планет та супутників і виражає один із законів Кеплера. Розглянемо приклад. Орбітою планети, що рухається під дією сили тяжіння Сонця, є еліпс (Рис. 21.4).

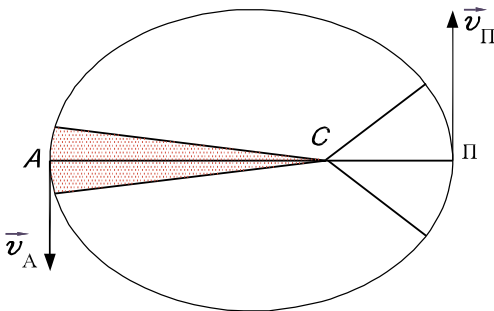


Рисунок 21.4

Сонце перебуває в фокусі  $C$  еліпса. Оскільки сила є центральною, то має місце закон площ. Тому в найближчій до Сонця точці орбіти  $\Pi$  (**перигей**) швидкість планети  $\vec{v}_\Pi$  буде найбільшою, а в найдальшій точці орбіти  $A$  (**афелій**) –

швидкість  $\vec{v}_A$  буде найменшою.

Цей результат витікає з рівняння (21.11), яке для точок  $A$  та  $\Pi$  дає  $v_A \cdot AC = v_\Pi \cdot C\Pi$ .

До цього висновку можна прийти, якщо врахувати, що площі секторів, утворених радіус–вектором за однакові проміжки часу, однакові; отже за той самий час планета в околі точки  $\Pi$  повинна пройти більший шлях, ніж в околі точки  $A$ .

#### 21.4. Теорема про зміну кінетичного моменту системи точок (теорема моментів)

Теорема моментів, доведена для однієї точки, буде справедлива для кожної точки системи. Отже, якщо розглянути точку системи з масою  $m_k$ , що має швидкість  $\vec{v}_k$ , то для неї можна записати

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_O(m_k \vec{v}_k)] = \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_O(\vec{F}_k^i),$$

де  $\vec{F}_k^e$  і  $\vec{F}_k^i$  – рівнодійні всіх зовнішніх та внутрішніх сил, що діють на точку.

Записавши такі рівняння для всіх точок системи та почленно додавши їх, одержимо:

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(m_k \vec{v}_k) \right] = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^i).$$

Остання сума в отриманому виразі за властивостями внутрішніх сил системи дорівнює нулю. Тоді, врахувавши вираз (21.1), запишемо:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \left[ \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) \right]. \quad (21.12)$$



Отримане рівняння виражає теорему моментів для системи: **похідна по часу від вектора головного моменту кількості руху системи (кінетичного моменту) відносно деякого центра дорівнює векторній сумі моментів усіх зовнішніх сил системи відносно того ж центра.**

Спроекувавши рівність (21.12) на осі нерухомої системи координат і прийнявши до уваги вираз (21.2), одержимо:

$$\begin{aligned}\frac{dK_x}{dt} &= \sum_{k=1}^n m_x (\vec{F}_k^e), \\ \frac{dK_y}{dt} &= \sum_{k=1}^n m_y (\vec{F}_k^e), \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e).\end{aligned}\tag{21.13}$$

Ці рівняння виражають теорему моментів відносно довільної нерухомої осі.

Доведеною теоремою широко користуються для вивчення обертального руху твердого тіла, а також у теорії гіроскопів та в теорії удару. Практична цінність теореми моментів у тому, що вона, аналогічно теоремі про зміну кількості руху, дозволяє виключити з розгляду невідомі внутрішні сили.

## 21.5. Закон збереження кінетичного моменту

### Висновки з теореми моментів:

1. Якщо зовнішні сили такі, що геометрична сума моментів цих сил відносно даного центра дорівнює нулю, то вектор головного моменту кількості руху системи відносно того ж центра сталий.

$$\text{Отже, якщо } \sum_{k=1}^n \vec{m}_O (\vec{F}_k^e) = 0, \text{ то } \vec{K}_O = \overline{\text{const}}.$$

2. Якщо зовнішні сили такі, що сума моментів цих сил відносно деякої осі дорівнює нулю, то головний момент кількості руху системи відносно тієї ж осі сталий.

$$\text{Тобто, якщо } \sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e) = 0, \text{ то } K_z = \text{const}.$$

Ці наслідки виражають закон збереження головного моменту кількості руху системи. Звідси виходить, що внутрішні сили не зможуть змінити головний момент кількості руху.

Розглянемо систему, що обертається навколо нерухомої осі  $Oz$ . Тоді, згідно з формулою (21.3),  $K_z = I_z \omega$ . Якщо в цьому випадку  $\sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e) = 0$ , то  $I_z \cdot \omega = \text{const}$ . Звідси такі висновки:

а) якщо система незмінна, тобто  $I_z = \text{const}$ , то  $\omega = \text{const}$ , тобто тверде тіло, закріплене на осі, обертається зі сталою швидкістю;

б) якщо система змінна, то під дією внутрішніх або зовнішніх сил її точки віддаляються або наближаються до осі  $Oz$ , що є причиною збільшення або зменшення  $I_z$ . Оскільки  $I_z \cdot \omega = \text{const}$ , то при збільшенні  $I_z$  кутова швидкість  $\omega$  буде зменшуватись, а при зменшенні  $I_z$  – збільшуватися. Таким чином, дією внутрішніх сил можна змінювати кутову швидкість обертання системи.

Розглянемо деякі приклади.

а). Досліди з платформою Жуковського. Для демонстрації закону збереження кінетичного моменту зручно користуватися "платформою Жуковського". Це кругла горизонтальна платформа на кулькових опорних підшипниках, яка має можливість з малим тертям обертатися навколо вертикальної осі  $z$ . Для лю-

дини, яка стоїть на такій платформі,  $\sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e) = 0$  і

$$I_z \cdot \omega = const.$$

Якщо людина, розвівши руки в боки, надасть собі поштовхом обертального руху навколо осі, а потім опустить руки, то величина  $I_z$  зменшиться, а кутова швидкість  $\omega$  зросте. Такий спосіб зміни кутової швидкості широко використовують у балеті, в фігурному катанні на ковзанах, під час виконання стрибків у повітрі (сальто).

б). Обертання снаряда в каналі ствола. Розглядаючи ствол та снаряд як одну систему, бачимо, що сили тиску порохових газів під час стрільби будуть внутрішні та не змінять величину кінетичного моменту, який до стрільби дорівнював нулю. Допустимо, що снаряд починає обертатися, наприклад, вправо, то ствол буде намагатися обертатися вліво так, щоб в кожний момент часу виконувалась рівність

$$I_{\text{сн}} \omega_{\text{сн}} = I_{\text{ств}} \omega_{\text{ств}}.$$

Цьому обертанню ствола заважають цапфи, якими він закріплений на лафеті. Унаслідок цього з'являється додатковий тиск на цапфи.

в). Реактивний момент гвинта. Повітряний гвинт, що встановлений на гелікоптері, не лише відкидає повітря вниз, але і надає цій масі повітря обертального руху. Сумарний кінетичний момент рухомої маси повітря та гелікоптера тоді весь час дорівнює нулю, оскільки система спочатку була нерухома, а сили взаємодії між гвинтом та повітрям внутрішні. Тому гелікоптер розпочинає обертальний рух у бік, протилежний обертанню гвинта. Обертальний момент, що діє при цьому на корпус гелікоптера, називають реактивним моментом.

Щоб запобігти реактивному обертанню корпусу одногвинтового гелікоптера, на його хвостовій частині ставлять другий гвинт. У багатогвинтового гелікоптера гвинти обертаються в різні боки.

### **Контрольні запитання**

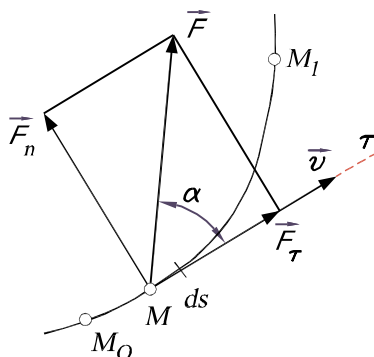
1. Що називають моментом кількості руху точки та системи?
2. Запишіть рівняння, які виражають теореми про зміну моменту кількості руху точки відносно центра та відносно осі.
3. Сформулюйте закон Кеплера.
4. Запишіть рівняння, які виражають теорему про зміну кінетичного моменту системи.
5. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту.
6. Поясняйте досліди з платформою Жуковського.

## Глава 22. Робота сили. Потужність

### 22.1. Елементарна робота сили, прикладеної до точки

Для характеристики дії сили, що діє на тверде тіло, використовують поняття роботи сили. **Робота сили характеризує ту дію сили, яка визначає зміну модуля швидкості рухомої точки.**

#### а) Натуральна форма опису руху точки.



Уведемо поняття елементарної роботи сили на нескінченно малому переміщенні  $ds$  (Рис. 22.1).

Елементарною роботою сили  $\vec{F}$  називають скалярну величину  $dA$ , яка дорівнює добутку проекції сили  $\vec{F}$  на вісь, дотичну до траєкторії руху точки, на елементарне переміщення

$$dA = F_{\tau} ds. \quad (22.1)$$

Рисунок 22.1

Це визначення відповідає поняттю про роботу як характеристику тієї дії сили, котра призводить до зміни модуля швидкості точки. Якщо розкласти силу на складові  $\vec{F}_{\tau}$  та  $\vec{F}_n$ , то модуль швидкості точки змінює складова  $\vec{F}_{\tau}$ , надаючи точці дотичне прискорення.

Складова  $\vec{F}_n$  змінює напрямок вектора швидкості  $\vec{v}$ , або, під час невірального руху, змінює тиск на в'язь. Знаючи, що  $F_{\tau} = F \cos \alpha$ , отримаємо

$$dA = F ds \cos \alpha. \quad (22.2)$$

Таким чином, елементарна робота сили дорівнює добутку проекції сили на напрямок переміщення точки на елементарне переміщення  $ds$ , або елементарна робота сили дорівнює добут-

ку модуля сили на елементарне переміщення  $ds$  та на косинус кута між напрямком сили та напрямком переміщення.

Якщо кут  $\alpha$  гострий, то робота додатна. Якщо кут  $\alpha = 0$ , то елементарна робота  $dA = Fds$ . Якщо кут  $\alpha$  тупий, то робота від'ємна. Для кута  $\alpha = 180^\circ$  елементарна робота  $dA = -Fds$ . Якщо кут  $\alpha = 90^\circ$ , тобто сила перпендикулярна до переміщення, то елементарна робота сили дорівнює нулю.

Знак роботи має такий зміст: робота додатна, коли дотична складова сили спрямована в бік руху, тобто коли сила прискорює рух; робота від'ємна, коли дотична складова сили спрямована в бік, протилежний руху, тобто сила сповільнює рух.

### **б) Векторна форма опису руху точки**

З кінематики відомо, що вектор елементарного переміщення  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , а  $ds = |\vec{v}|dt$ .

Звідси виходить, що  $ds = |d\vec{r}|$ . Використавши поняття скалярного добутку двох векторів, рівність (22.2) можна записати у вигляді

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (22.2^*)$$

Тобто, **елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор елементарного переміщення точки прикладання сили.**

### **в) Координатна форма опису руху точки.**

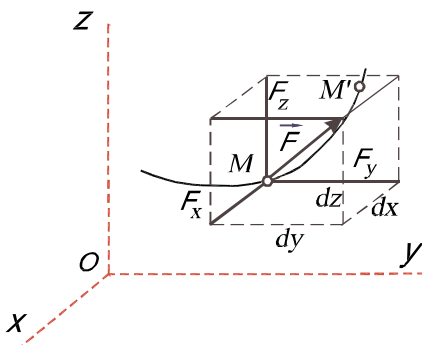
Запишемо аналітичну формулу елементарної роботи.

Для цього вектор сили  $\vec{F}$  споектуємо на осі  $Ox, Oy, Oz$ .

На рис. 22.2 проєкціями вектора сили  $\vec{F}$  на осі є величини  $F_x, F_y, F_z$ .

Елементарне переміщення  $MM' = ds$  складається з переміщень  $dx, dy, dz$  вздовж координатних осей, де  $x, y, z$  – координати точки  $M$ . Тоді роботу сили  $\vec{F}$  на переміщенні  $ds$  мож-

на записати як суму робіт її складових  $F_x, F_y, F_z$  на відповідних



переміщеннях  $dx, dy, dz$ . Складова  $F_x$  виконує роботу лише на переміщенні  $dx$ , яка дорівнює  $F_x dx$ . Роботу двох інших складових сили на переміщеннях  $dy, dz$  записують аналогічно. Тоді елементарна робота сили:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (22.3)$$

Той же результат отримаємо, якщо розписати скалярний добуток

**Рисунок 22.2**  
(22.2\*),  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ .

## 22.2. Робота сили

Роботу сили на довільному кінцевому переміщенні  $M_0 M_1$  (Рис. 22.1) обчислюють як інтегральну суму відповідних елементарних робіт

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds, \quad (22.4)$$

або

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (22.5)$$

Тобто робота сили на довільному переміщенні  $M_0 M_1$  дорівнює взятому по цьому переміщенні інтегралу від елементарної роботи. Інтеграли в формулах (22.4) та (22.5) беруть вздовж кривої  $M_0 M_1$ , тобто ці інтеграли криволінійні.

Якщо величина  $F_\tau = const$ , то із (22.4)

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau s.$$

Такий випадок має місце тоді, коли діюча сила стала за величиною та за напрямком, а точка, до якої прикладена сила, рухається прямолінійно. Тоді  $F_\tau = F \cos \alpha = const$  і робота сили

$$A_{(M_0M_1)} = F s \cos \alpha.$$

Одиницею вимірювання роботи в SI є джоуль (1 Дж = 1 Нм).

Для розв'язку основних задач динаміки важливо виділити ті сили, роботу яких можна вирахувати, не знаючи закону руху точки, на яку діють ці сили. З формули (22.5) видно, що такими можуть бути лише сталі сили або сили, що залежать від положення рухомої точки.

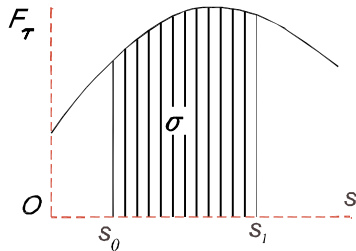
Для обчислення роботи сил, що залежать від часу або швидкості руху точки, необхідно знати закон її руху, тобто координати  $x, y, z$  як функції часу. Тоді всі змінні величини можна виразити через  $t$  й обчислити інтеграл (22.5).

**Не знаючи закону руху точки, тобто не розв'язавши основну задачу динаміки, роботу таких сил обчислити неможливо.**

### Графічний спосіб обчислення роботи

Якщо сила залежить від переміщення  $s$  і відомий графік залежності  $F_\tau$  від  $s$ , то роботу сили  $\vec{F}$  можна обчислити графічно.

Нехай у положенні  $M_0$  точка перебуває від початку відліку на відстані  $s_0$  (Рис. 22.3), а в положенні  $M_1$  – на відстані  $s_1$ . Тоді за формулою (22.4), враховуючи геометричну суть інтеграла, одержимо:



**Рисунок 22.3**



$$A_{(M_0M_1)} = \int_{S_0}^{S_1} F_{\tau} ds = \sigma,$$

де  $\sigma$  – величина заштрихованої на рис. 22.3 площі, помноженої на масштабний коефіцієнт.

### 22.3. Потужність

**Потужністю називають величину, що визначає роботу сили за одиницю часу,**

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_{\tau} ds}{dt} = F_{\tau} v. \quad (22.6)$$

Отже потужність дорівнює добутку дотичної складової сили на швидкість руху.

Якщо робота виконується рівномірно, то потужність

$$N = \frac{A}{t}, \text{ де } t \text{ – час, протягом якого виконується робота } A.$$

Підставивши в (22.6) вираз для  $dA$  із (22.2), одержимо

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

або, використовуючи **поняття скалярного добутку двох векторів,**

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z, \quad (22.7)$$

тобто потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили  $\vec{F}$  на вектор швидкості  $\vec{v}$  точки прикладання сили.

Одиницею вимірювання потужності в SI є ват  $\left(1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}\right)$ .

З рівняння  $N = F_{\tau} v$  видно, що у двигуна з потужністю  $N$  сила тяги  $F_{\tau}$  буде тим більша, чим менша швидкість руху  $v$ .

Тому на підйомах включають понижену передачу, що дає змогу розвивати автомобілю максимальну силу тяги  $F_\tau$ .

### 22.4. Приклади обчислення роботи

Розглянуті нижче приклади можна використовувати під час розв'язування задач.

#### Робота сили ваги

Точка  $M$ , на яку діє сила ваги  $\vec{G}$ , переміщується з положення  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  в положення  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  (Рис. 22.4).

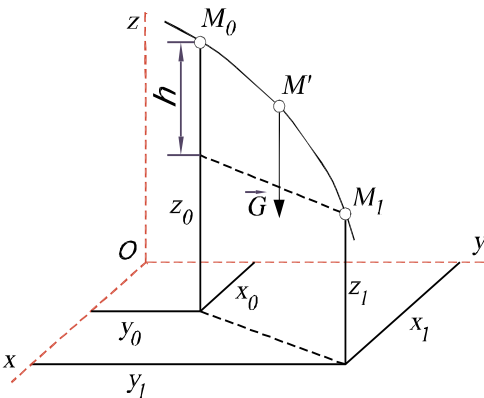


Рисунок 22.4

Виберемо осі координат так, щоб вісь  $Oz$  була спрямована вертикально вгору. Тоді

$$G_x = G_y = 0, G_z = -G.$$

Підставивши ці значення в (22.5) і враховуючи, що змінною інтегрування є  $z$ , одержимо:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (-G) dz = -G \int_{z_0}^{z_1} dz = G(z_0 - z_1).$$

Якщо точка  $M_0$  розміщена вище від  $M_1$ , то  $z_0 - z_1 = h$ , де  $h$  – величина вертикального переміщення точки; якщо точка  $M_0$  розміщена нижче від точки  $M_1$ , то  $z_0 - z_1 = -h$ .

Таким чином

$$A_{(M_0M_1)} = \pm Gh. \tag{22.8}$$

Робота сили ваги дорівнює взятому зі знаком плюс чи

мінус добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладання.

Робота додатна, якщо початкове положення точки вище від кінцевого. З отриманого результату видно, що **робота сили ваги не залежить від траєкторії рухомої точки**. Сили, які мають таку властивість, називають **потенціальними**.

### Робота сил ваги, що діють на систему точок

Робота сили ваги елементарної частини з вагою  $G_k$  дорівнює  $G_k(z_{k0} - z_{k1})$ , де  $z_{k0}, z_{k1}$  – координати, що визначають початкове та кінцеве положення елементарної частини. Тоді сума робіт усіх сил ваги системи дорівнює

$$A = \sum_{k=1}^n G_k z_{k0} - \sum_{k=1}^n G_k z_{k1} = G(z_{C0} - z_{C1}) = \pm Gh_C, \quad (23.9)$$

де враховано, що  $z_C G = \sum_{k=1}^n G_k z_k$ ,  $G$  – вага системи,  $h_C$  – вертикальне переміщення центра тяжіння.

Тобто, роботу сил ваги системи обчислюють як роботу їх рівнодійної  $G$  на переміщенні центра тяжіння системи.

### Робота пружної сили

Розглянемо тіло  $M$ , яке лежить на горизонтальній площині та прикріплене до вільного кінця пружини (Рис. 22.5).

Точкою  $O$  відмітимо кінець недеформованої пружини ( $AO = \ell_0$ ) і приймемо цю точку за початок осі  $Ox$ .

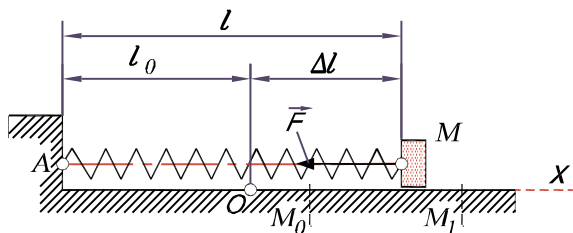


Рисунок 22.5

Після зміщення тіла  $M$  на  $\Delta \ell$  від положення рівноваги на нього буде діяти сила  $\vec{F}$ , спрямована до точки  $O$ .

Величина цієї сили за законом Гука пропорційна видовженню пружини  $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ . У нашому випадку  $\Delta\ell = x$ . Тоді за модулем сила  $\vec{F}$  дорівнює

$$F = c|\Delta\ell| = c|x|,$$

де  $c$  – коефіцієнт жорсткості пружини. Розмірність  $c$  –  $[\text{Н/м}]$ .

Знайдемо роботу сили пружності при переміщенні тіла з положення  $M_0(x_0)$  в положення  $M_1(x_1)$ . Ураховуючи, що в цьому прикладі  $F_x = -cx$ ;  $F_y = F_z = 0$ , одержимо

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} (-cx) dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2). \quad (22.10)$$

Цей результат можна отримати також за графіком залежності  $F$  від  $x$ , обчисливши площу  $\sigma$  заштрихованої на рис. 22.6 трапеції з урахуванням знаку роботи.

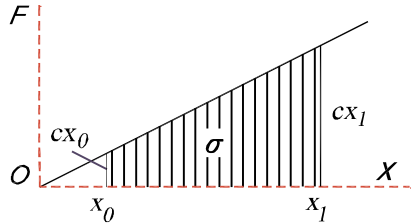


Рисунок 22.6

У формулі (22.10)  $x_0 = \Delta\ell_{\text{поч}}$  – початкове видовження пружини,  $x_1 = \Delta\ell_{\text{кін}}$  – кінцеве видовження пружини. Тоді

$$A_{M_0M_1} = \frac{c}{2} \left[ (\Delta\ell_{\text{поч}})^2 - (\Delta\ell_{\text{кін}})^2 \right],$$

тобто робота сили пружності дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості на різницю квадратів початкового та кінцевого видовжень (стиснень) пружини.

Робота буде додатною, коли  $|\Delta\ell_{\text{поч}}| > |\Delta\ell_{\text{кін}}|$ , тобто коли кінець пружини переміщається до рівноважного положення тіла на пружині. Отже, робота сили пружності  $\vec{F}$  залежить від зна-

чень  $\Delta \ell_{\text{поч}}$  та  $\Delta \ell_{\text{кін}}$  і не залежить від форми траєкторії тіла. Тобто, сила пружності також потенціальна.

### Робота сили тертя

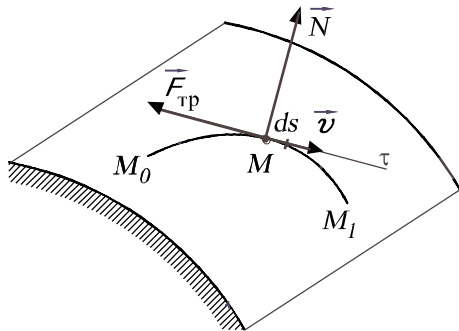


Рисунок 22.7

Розглянемо точку, що рухається по деякій шорсткій площині або прямій (Рис. 22.7). Сила тертя ковзання, що діє на точку, дорівнює за модулем  $fN$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання, а  $N$  – нормальна реакція поверхні. Сила тертя ковзання спрямована в бік, протилежний переміщенню

точки, тобто  $F_{\text{тр}} = fN$ . Тоді

$$A_{M_0M_1} = - \int_{M_0}^{M_1} F_{\text{тр}} ds = - \int_{M_0}^{M_1} fN ds. \quad (22.11)$$

Якщо величина сили тертя стала, то  $A_{M_0M_1} = -F_{\text{тр}}s$ , де  $s$  – довжина дуги кривої  $M_0M_1$ , по якій переміщається точка.

Таким чином, робота сили тертя ковзання завжди від'ємна. Оскільки ця робота залежить від довжини дуги  $M_0M_1$ , то сила тертя ковзання не потенціальна.

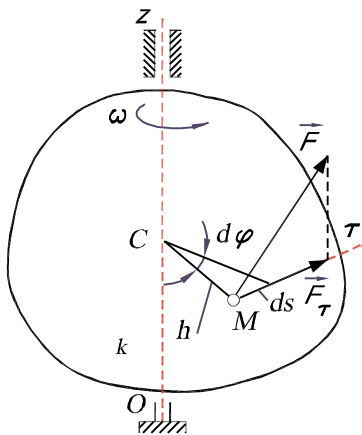


Рисунок 22.8

### Робота сили, прикладеної до тіла, що обертається

Елементарна робота сили  $\vec{F}$ , яка прикладена до тіла, яке обертається

(Рис. 22.8), дорівнює

$$dA = F_{\tau} ds = F_{\tau} h d\varphi .$$

де  $ds = h d\varphi$ ,  $d\varphi$  – кут повороту тіла.

Величину  $F_{\tau} h = m_z(\vec{F}) = M_z$  називають обертальним моментом.

$$\text{Тоді} \quad dA = M_z d\varphi . \quad (22.12)$$

Отже елементарна робота дорівнює добутку обертального моменту на елементарний кут повороту.

Формула (22.12) справедлива також для декількох сил, що діють на тіло, якщо врахувати  $M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k)$ . При повороті тіла на кінцевий кут робота буде дорівнювати

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi ,$$

а у випадку сталого моменту ( $M_z = const$ ):

$$A = \pm M_z \varphi . \quad (22.13)$$

Знак роботи не залежить від знаку моменту  $M_z$ . Робота буде додатня тоді, коли напрям обертання та напрям моменту  $M_z$  однакові. Якщо напрям обертання та напрям моменту протилежні – то робота від'ємна.

Якщо на тіло діє пара сил, що лежить у площині, перпендикулярній до осі  $Oz$ , то  $M_z$  в формулах (22.12) – (22.13) буде моментом цієї пари.

Для визначення потужності використаємо рівність (22.6) і запишемо:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega . \quad (22.14)$$

Отже, якщо сили діють на тіло, яке обертається навколо не-

рухомої осі, то потужність дорівнює добутку обертального моменту на кутову швидкість. За тієї самої потужності обертальний момент буде тим більшим, чим менша кутова швидкість.

### Робота моменту сили тертя кочення

На колесо радіуса  $R$ , що котиться по площині без ковзання, діє сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , яка перешкоджає ковзанню точки дотику  $B$  колеса до площини. Елементарна робота цієї сили дорівнює

$$dA = -F_{\text{тр}} ds_B.$$

Але точка  $B$  у даному випадку є миттєвим центром швидкостей, тому її швидкість дорівнює нулю ( $v_B = 0$ ). Отже дорівнюють нулю елементарне переміщення точки  $B$  ( $ds_B = 0$ ), оскільки  $ds_B = v_B dt$ , та елементарна робота сили тертя на такому переміщенні ( $dA = 0$ ).

Звідси випливає: при коченні без ковзання робота сили тертя ковзання на довільному переміщенні тіла дорівнює нулю; дорівнює нулю і робота реакції  $\vec{N}$ , прикладеної в точці  $B$  (Рис. 22.9, а).

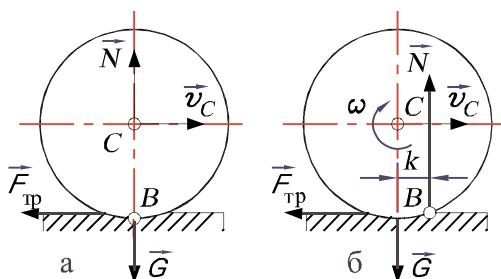


Рисунок 22.9

Опір коченню, що виникає внаслідок деформації поверхні, складає пара сил, момент якої  $M_{\text{коч}} = \delta N$ , де  $\delta$  – коефіцієнт тертя кочення.

Ураховуючи, що під час кочення кут повороту колеса

$$d\varphi = \frac{ds_C}{R} \text{ одержимо:}$$

$$dA = -\delta N d\varphi = -\frac{\delta}{R} N ds_C,$$

де  $ds_C$  – елементарне переміщення центра  $C$  колеса.

Якщо  $N = const$ , то повна робота сили опору коченню буде дорівнювати

$$A = -\delta N \varphi = -\frac{\delta}{R} N s_C. \quad (22.15)$$

Оскільки величина  $\frac{\delta}{R}$  мала, то за наявності інших сил опору, сили опору коченню можна не враховувати.

### Робота сили тяжіння

Якщо Землю (планету) розглядати як однорідну кулю, то на точку  $M$  з масою  $m$ , що розміщена поза кулю або на її поверхні, буде діяти сила тяжіння  $\vec{F}$ . Ця сила, яка спрямована до центра  $O$  кулі, дорівнює

$$F = k \frac{m}{r^2}.$$

Коефіцієнт  $k$  можна визначити з умови, що на поверхні Землі ( $r = R$ , де  $R$  – радіус Землі) сила тяжіння дорівнює  $mg$ . Тоді

$$mg = F = k \frac{m}{R^2} \quad \text{і} \quad k = gR^2.$$

Запишемо елементарну роботу сили  $\vec{F}$ .

Як видно з рис. 22.10, елементарне переміщення  $M_0M_1$  точки  $M$  можна розкласти: на переміщення  $\vec{Ma}$ , яке чисельно дорівнює переміщенню  $dr$  відстані  $OM = r$  і спрямоване вздовж  $OM$ , та переміщення  $\vec{Mb}$ , яке перпендикулярне до  $OM$  ( $\vec{Mb} \perp OM$ ), а також до сили  $\vec{F}$ .

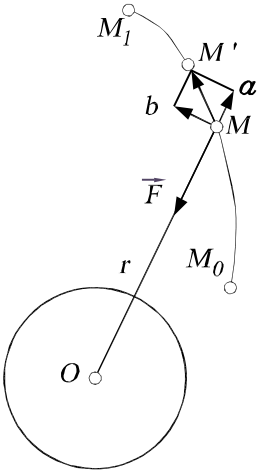


Рисунок 22.10



На переміщенні  $\overrightarrow{Mb}$  робота сили  $\vec{F}$  дорівнює нулю, а на переміщенні  $\overrightarrow{Ma}$ , яке спрямоване протилежно до сили  $\vec{F}$ ,

$$dA = -Fdr = -k \frac{m}{r^2} dr.$$

Допустимо, що точка  $M$  переміщується з положення  $M_0(r = r_0)$  у положення  $M_1(r = r_1)$ . Тоді робота сили  $\vec{F}$

$$\begin{aligned} A_{M_0M_1} &= \int_{M_0}^{M_1} dA = -km \int_{z_0}^{z_1} \frac{dr}{r^2} = -km \int_{z_0}^{z_1} d\left(\frac{1}{r}\right) = \\ &= km \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) = mgR^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right). \end{aligned} \quad (22.16)$$

Робота буде додатна, якщо  $r_0 > r_1$ , тобто коли кінцеве положення точки ближче до поверхні Землі ніж початкове.

Робота сили тяжіння не залежить від вигляду траєкторії, вздовж якої переміщається точка  $M$ , тобто **сила тяжіння є потенціальною**.

### Контрольні запитання

1. Що називають елементарною роботою сили?
2. Як обчислюють роботу сили на довільному кінцевому переміщенні?
3. Як графічно можна обчислити роботу?
4. Що називають потужністю?
5. Як обчислюють роботу сили ваги, сили пружності, сили тертя кочення, сили тяжіння?
6. Які сили називають потенціальними?
7. Як обчислити роботу сили, прикладеної до тіла, що обертається?

## Глава 23. Теорема про зміну кінетичної енергії точки та системи

### 23.1. Кінетична енергія точки та системи

Уведемо поняття ще однієї міри руху – кінетичної енергії.

**Кінетичною енергією (або живою силою) точки називають скалярну величину  $\frac{mv^2}{2}$ , що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості.**

**Кінетичною енергією системи називають скалярну величину  $T$ , що дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій усіх точок системи.**

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (23.1)$$

Кінетична енергія є характеристикою поступального та обертального рухів системи, тому теорему про зміну кінетичної енергії часто використовують для розв'язку задач.

Головна відмінність кінетичної енергії від уведених раніше характеристик  $\vec{Q}$  та  $\vec{K}_O$  полягає в тому, що кінетична енергія є величиною скалярною та додатною. Тому вона не залежить від напрямку руху частин системи і не характеризує зміну цих напрямків.

Відмітимо ще одну важливу обставину. Внутрішні сили, що діють на систему, не змінюють векторні характеристики  $\vec{Q}$  та  $\vec{K}_O$ . Але якщо під дією внутрішніх сил змінюються модулі швидкостей точок системи, то при цьому змінюється й величина  $T$ .

Якщо систему складають декілька тіл, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій цих тіл:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k. \quad (23.2)$$

Одиницею вимірювання кінетичної енергії у SI є  $[\text{Дж}] = [\text{Н} \cdot \text{м}] = \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right]$ .

### 23.2. Кінетична енергія твердого тіла

Матеріальна система дуже часто є твердим тілом або сукупністю твердих тіл. Тому потрібно вміти визначати кінетичну енергію твердого тіла, яке може здійснювати різні рухи.

Оскільки тверде тіло розглядають з неперервною розподіленою масою, то всі суми, що входять до виразу кінетичної енергії системи, переходять в інтеграли, а масу  $m_k$  окремої точки замінюють диференціалом  $dm$ . Тому формула для визначення кінетичної енергії твердого тіла має вигляд

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} v^2 dm, \quad (23.3)$$

де інтегрування проводять по масі всього тіла.

Наведемо формули для обчислення кінетичної енергії тіла у випадках різних його рухів.

#### Поступальний рух

Під час поступального руху твердого тіла швидкості всіх його точок однакові (Рис. 23.1). Винісши  $v^2$  у формулі (23.3) за знак інтеграла, одержимо:

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} v^2 \int_{(M)} dm = \frac{1}{2} M v_C^2. \quad (23.4)$$

Тут ураховано, що  $\int_{(M)} dm = M$ , а

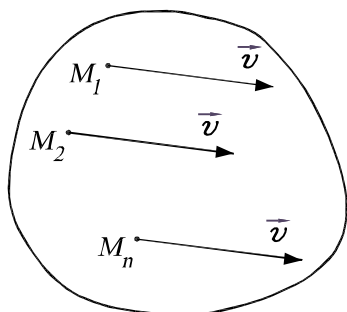


Рисунок 23.1

швидкості  $v_k = v_C$ .

**Отже кінетична енергія тіла під час поступального руху дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.**

Аналогічний вираз одержимо використовуючи формулу (23.1), в яку замість  $v_k$  підставимо  $v_C$ :

$$T_{\text{пост}} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} M v_C^2.$$

### Обертальний рух

Якщо тверде тіло обертається навколо деякої нерухомої осі  $Oz$ , то модуль швидкості  $k$ -тої точки твердого тіла дорівнює  $v_k = \omega h_k$ , де  $\omega$  – модуль кутової швидкості твердого тіла,  $h_k$  – відстань від  $k$ -ої точки до осі обертання  $Oz$ . Підставивши в формулу (23.3) вираз для швидкості точки, одержимо

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} \omega^2 h_k^2 dm.$$

Винісши у цьому виразі за знак інтеграла  $\omega^2$  (кутова швидкість однакова для всіх точок тіла та від змінної інтегрування не залежить), отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{(M)} h_k^2 dm,$$

де  $\int_{(M)} h_k^2 dm = I_z$  – момент інерції тіла відносно осі обертання.

ня.

Таким чином 
$$T_{\text{об}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (23.5)$$

Використовуючи формулу (23.1), одержимо такий самий результат

$$T_{\text{об}} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 .$$

### Плоскопаралельний рух

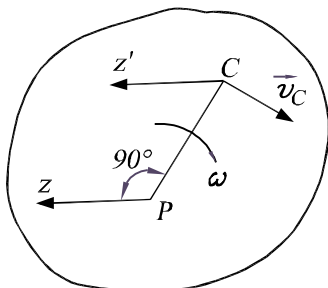


Рисунок 23.2

Під час плоскопаралельного руху швидкості точок тіла в кожний момент часу розподілені так, немов би тіло обертається навколо осі  $Pz$ , перпендикулярної до площини руху, що проходить через миттєвий центр швидкостей  $P$  (Рис. 23.2).

$$\text{Тобто} \quad T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} I_{Pz} \omega^2 , \quad (23.6)$$

де  $I_{Pz}$  – момент інерції тіла відносно осі  $Pz$ ,  $\omega$  – кутова швидкість тіла. Величина  $I_{Pz}$  буде змінною, оскільки положення центра  $P$  під час руху тіла змінюється.

Уведемо постійний момент інерції  $I_{Cz'}$  відносно осі, що проходить через центр мас  $C$  ( $Cz' \parallel Pz$ ). За теоремою Гюйгенса  $I_{Pz} = I_{Cz'} + Md^2$ , де  $d = CP$ . Підставимо цей вираз у формулу (23.6). Урахувавши, що точка  $P$  – миттєвий центр швидкостей, а  $\omega \cdot d = \omega \cdot CP = v_C$ , будемо мати:

$$\begin{aligned} T_{\text{плоск}} &= \frac{1}{2} I_{Pz} \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} (I_{Cz'} + Md^2) = \\ &= \frac{1}{2} I_{Cz'} \omega^2 + \frac{1}{2} Md^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{Cz'} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv_C^2 . \end{aligned} \quad (23.7)$$

**Під час плоскопаралельного руху кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичних енергій: поступального руху тіла зі**

швидкістю центра мас і обертального руху тіла навколо центра мас.

### Сферичний рух

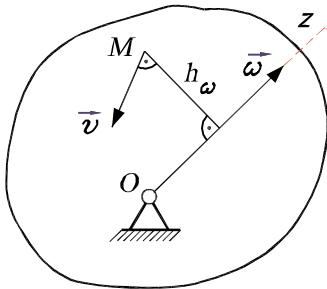


Рисунок 23.3

Під час сферичного руху твердого тіла (руху тіла з однією нерухомою точкою  $O$ ) модуль швидкості довільної точки  $M$  визначається рівністю  $v = \omega h_\omega$  (Рис. 23.3), де  $\omega$  – кутова швидкість тіла,  $h_\omega$  відстань від точки  $M$  до миттєвої осі обертання тіла  $Oz$ .

Порівнюючи сферичний рух з обертанням навколо нерухомої осі, коли  $v = \omega \cdot h_k$ , одержимо вираз для кінетичної енергії твердого тіла під час сферичного руху

$$T = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2, \quad (23.8)$$

де  $I_\omega$  – момент інерції тіла відносно миттєвої осі обертання.

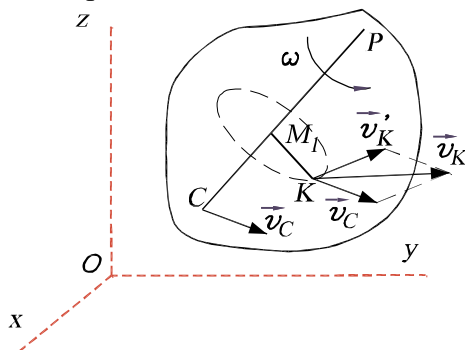
**Під час сферичного руху кінетична енергія твердого тіла дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно миттєвої осі обертання на квадрат кутової швидкості.**

Звернемо увагу на відмінність формул (23.5) та (23.8). Положення осі обертання  $Oz$  не змінюється відносно тіла, а тому момент інерції  $I_z$  у формулі (23.5) є величиною сталою. Положення миттєвої осі обертання змінюється відносно тіла, внаслідок цього момент інерції  $I_\omega$  у формулі (23.8) є змінною величиною.

### Загальний випадок руху

Якщо за полюс прийняти точку  $C$  – центр мас тіла (Рис. 23.4), то рух тіла в загальному випадку буде складатися з поступального руху тіла зі швидкістю  $\vec{v}_C$  та обертального навколо миттєвої осі  $CP$ , що проходить через цей полюс. Тоді швид-

кість  $\vec{v}_k$  довільної точки тіла дорівнює геометричній сумі швидкості полюса  $\vec{v}_C$  і швидкості  $\vec{v}'_k$ , яку отримує точка при обертанні разом з тілом навколо осі  $CP$ , яка проходить через полюс,



$$\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v}'_k .$$

При цьому  $v'_k = \omega \cdot h_k$ , де  $h_k$  – відстань від точки до осі  $CP$ , а  $\omega$  – абсолютна кутова швидкість обертання тіла навколо цієї осі. Звідси випливає, що

**Рисунок 23.4**

$$\vec{v}_k^2 = v_k^2 = (\vec{v}_C + \vec{v}'_k)^2 = \vec{v}_C^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_k + \vec{v}'_k{}^2 .$$

Підставивши отриманий вираз у (23.1) і врахувавши, що  $v'_k = \omega \cdot h_k$ , одержимо:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_C^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 + \vec{v}_C \sum_{k=1}^n m_k v'_k .$$

Відмітимо, що  $\sum_{k=1}^n m_k = M$  – маса тіла;  $\sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = I_{CP}$  –

момент інерції тіла відносно осі  $CP$  (миттєва вісь);  $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}'_k = 0$ ,

так як  $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}'_k = M \vec{v}'_C$  (що витікає з формули

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{m} \right) \text{ або } \vec{v}_C = \frac{\sum m_k \vec{v}_k}{M} .$$

Величина  $M \vec{v}'_C$  є тією кількістю руху, яку одержує тіло при

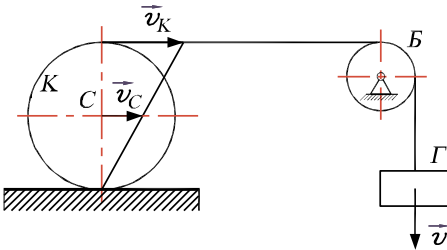
обертанні навколо осі  $CP$ , що проходить через центр мас тіла. Отже

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{CP} \omega^2 . \quad (23.9)$$

**Кінетична енергія тіла в загальному випадку руху дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху тіла зі швидкістю центра мас та кінетичної енергії обертального руху навколо миттєвої осі, що проходить через центр мас тіла (Теорема Кьонига).**

**Задача 23.1.** Коток  $K$  з масою  $m_1$  лежить на горизонтальній площині (Рис. 23.5). Коток обмотаний тросом, перекинутим через блок  $B$  радіуса  $r$ . До вільного кінця троса прикріплено вантаж  $\Gamma$  маси  $m_3$ .

Під час опускання вантажу зі швидкістю  $\vec{v}$  трос приводить в рух без ковзання коток  $K$ . Визначити кінетичну енергію системи, якщо момент інерції блока  $B$  відносно осі обертання дорівнює  $I_2$ ; коток вважати однорідним круглим циліндром, масу троса не враховувати.



**Рисунок 23.5**

енергія згідно з (23.4) дорівнює

$$T_{\Gamma} = \frac{1}{2} m_3 v^2 .$$

Блок  $B$  обертається навколо нерухомої осі. Згідно з (23.5) його кінетична енергія

**Розв'язок**  
Кінетична енергія системи  
 $T = T_K + T_B + T_{\Gamma} .$

Вантаж  $\Gamma$  рухається поступально і його кінетична енергія



$$T_B = \frac{1}{2} I_2 \omega_B^2 = \frac{1}{2} I_2 \left( \frac{v}{r} \right)^2, \text{ так як } \omega_B = \frac{v}{r}.$$

Коток  $K$  здійснює плоский рух. Його кінетична енергія відповідно до (23.6)

$$T_K = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zc} \omega_k^2 = \frac{1}{2} m_1 \frac{v^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{2} \cdot \frac{v^2}{4R^2} = \frac{3}{16} m_1 v^2.$$

Кінетичну енергію системи запишемо так

$$T = \frac{3}{16} m_1 v^2 + \frac{1}{2} I_2 \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_3 v^2.$$

### 23.3. Теорема про зміну кінетичної енергії точки

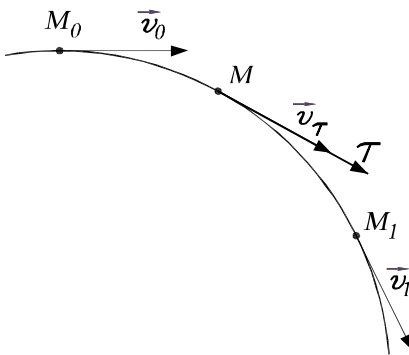


Рисунок 23.6

траєкторії руху в точці

Розглянемо точку маси  $m$ , яка під дією прикладеної до неї сили з положення  $M_0$ , де вона має швидкість  $\vec{v}_0$ , переміститься в положення  $M_1$ , де її швидкість дорівнює  $\vec{v}_1$  (Рис. 23.6).

Запишемо основний закон руху точки  $m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$  і спроектуємо цей вираз на дотичну до

$$m a_\tau = \sum_{k=1}^n F_{k\tau}. \quad (23.10)$$

Дотичне прискорення запишемо так

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v.$$

Тоді 
$$m \frac{dv}{ds} v = \sum_{k=1}^n F_{k\tau}.$$

Помножимо обидві частини рівностей на  $ds$  та внесемо  $m$  під знак диференціала й одержимо

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n dA_k, \quad (23.11)$$

де  $F_{kz} ds = dA_k$  – елементарна робота сили  $\vec{F}_k$ .

Рівність (23.11) виражає **теорему про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі**: повний диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі усіх діючих на точку сил.

Після інтегрування обох частини рівності (23.11) в межах, що відповідають значенням швидкостей точки в початковому та кінцевому положеннях, отримаємо

$$\int_{v_0}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{(M_0M_1)} \sum_{k=1}^n dA_k \quad \text{або}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_{k(M_0M_1)}. \quad (23.12)$$

Рівність (23.12) виражає **теорему про зміну кінетичної енергії точки в інтегральній формі**: зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх сил, які діють на точку на цьому переміщенні.

**Випадок невільного руху точки.** У разі невільного руху точки в праву частину рівності (23.12) увійде робота заданих активних сил  $\vec{F}_k^a$  і робота реакцій в'язей  $\vec{N}$ . Обмежимося розглядом руху точки по нерухомій гладкій поверхні або кривій лінії.

У цьому випадку реакція  $\vec{N}$  (Рис. 23.7) напрямлена по нормалі до траєкторії точки та  $N_\tau = 0$ .

Тоді робота реакції нерухо-  
мої гладкої поверхні (або кри-  
вої) на довільному переміщенні  
точки дорівнює нулю й за вира-  
зом (23.12) одержимо:

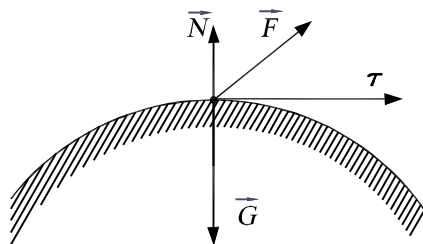


Рисунок 23.7

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k^a (M_0 M_1). \quad (23.13)$$

Таким чином, під час переміщення точки по нерухомій гладкій поверхні або кривій лінії зміна кінетичної енергії точки дорівнює сумі робіт прикладених до точки активних сил на цьому переміщенні.

Якщо поверхня (крива) шорстка, то до роботи активних сил додають роботу сил тертя ковзання.

Якщо поверхня (крива) рухається, то абсолютне переміщення точки  $M$  може бути не перпендикулярним до реакції й тоді робота реакції  $\vec{N}$  не дорівнює нулю.

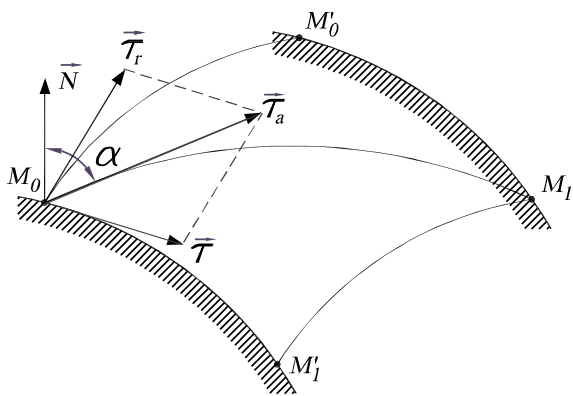


Рисунок 23.8

Матеріальна точка рухається по гладкій поверхні із положення  $M_0$  у положення  $M'_1$  (Рис. 23.8).

Сама ж поверхня переміщується разом з точкою із положення  $M_0$  в положення  $M'_0$ .

Сумарним переміщенням точки буде  $M_0M_1$ .

Нормальна реакція гладкої поверхні  $\vec{N}$  перпендикулярна дотичній до поверхні  $\vec{\tau}_r$  (відносний рух). Кут  $\alpha = \angle NM_0\vec{\tau}_a \neq 90^\circ$  ( $\vec{\tau}_a$  – дотична до траєкторії абсолютного руху точки). Отже проекція  $\vec{N}$  на  $\vec{\tau}_a$  не дорівнює нулю й робота нормальної реакції на абсолютному переміщенні не дорівнює нулю.

Будемо вважати, що всі складові, які входять до рівності (23.11), залежать від часу  $t$ . Розділивши обидві частини рівності (23.11) на  $dt$ , одержимо (третя форма теореми):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \frac{1}{dt} \sum_{k=1}^n dA_k = \sum_{k=1}^n \frac{dA_k}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k. \quad (23.14)$$

**Отже, повна похідна по часу від кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює сумарній потужності сил, що діють на точку.**

#### 23.4. Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Доведена раніше теорема справедлива для довільної точки системи. Таким чином, якщо розглянути деяку точку системи з масою  $m_k$ , що має швидкість  $\vec{v}_k$ , то для неї можна записати

$$d \left( \frac{m_k v_k^2}{2} \right) = dA_k^e + dA_k^i,$$

де  $dA_k^e$  і  $dA_k^i$  – елементарні роботи зовнішніх та внутрішніх сил, які діють на точку. Просумуємо такі рівняння для кожної точки системи

$$d\left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n dA_k^e + \sum_{k=1}^n dA_k^i, \quad (23.15)$$

або

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^e + \sum_{k=1}^n dA_k^i. \quad (23.16)$$

Рівність (23.16) виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи в диференціальній формі: **повний диференціал кінетичної енергії системи дорівнює сумі елементарних робіт усіх зовнішніх та внутрішніх сил, які діють на систему.**

Проінтегрувавши обидві частини цієї рівності в межах, що відповідають переміщенню системи з деякого початкового положення, де кінетична енергія дорівнює  $T_0$ , у положення, де кінетична енергія становитиме  $T$ , отримаємо:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i. \quad (23.17)$$

Одержана залежність виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи в інтегральному вигляді: **зміна кінетичної енергії системи за деякого її переміщення дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх та внутрішніх сил, які діють на систему під час цього переміщення.**

Взявши похідну за часом від (23.17), одержимо

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dA_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{dA_k^i}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{k=1}^n N_k^i. \quad (23.18)$$

**Повна похідна від кінетичної енергії за часом дорівнює сумі потужностей усіх зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до точок системи.** На відміну від теореми про зміну кількості руху та про зміну кінетичного моменту, у формулах (23.16) – (23.18) наявні внутрішні сили.

Розглянемо два важливі випадки.

### Незмінна система

Незмінною називають таку систему точок, де відстані між довільними точками при русі системи залишаються незмінними. Прикладом такої системи є абсолютно тверде тіло.

Дві точки  $B_1$  та  $B_2$  незмінної системи (Рис. 23.9) діють одна на одну з силами  $\vec{F}_{12}^i$  та  $\vec{F}_{21}^i$  ( $\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i$ ) і мають у даний момент швидкості  $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$ .

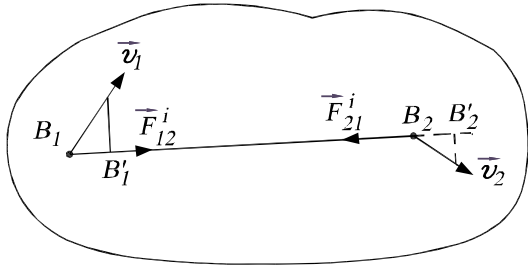


Рисунок 23.9

За проміжок часу  $dt$  переміщення цих точок  $d\vec{s}_1 = \vec{v}_1 dt$  та  $d\vec{s}_2 = \vec{v}_2 dt$ , які напрямлені вздовж векторів  $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$ . Але відрізок  $B_1 B_2$  незмінний і за відомою теоремою з кінематики проекції швидкостей  $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$  точок  $B_1$  та  $B_2$ , а також проекції переміщень  $d\vec{s}_1$ ,  $d\vec{s}_2$  на напрямок відрізка  $B_1 B_2$  однакові між собою, тобто  $\overline{B_1 B_1'} = \overline{B_2 B_2'}$ .

Тоді елементарні роботи сил  $\vec{F}_{12}^i$  та  $\vec{F}_{21}^i$  однакові за модулем, але протилежні за знаком, та їх сума дорівнює нулю. Звідси робимо висновок, що для незмінної системи сума робіт усіх внутрішніх сил дорівнює нулю і формули (23.16) та (23.17) запишемо так:

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^e \quad (23.19)$$

або 
$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e . \quad (23.20)$$

### Система з ідеальними в'язями

Розглянемо систему, на яку накладено в'язі, що не залежать від часу. Розділимо всі зовнішні та внутрішні сили, які діють на систему, на сили активні та реакції в'язей. Тоді рівняння (23.16) набуде вигляду:

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^a + \sum_{k=1}^n dA_k^r ,$$

де  $\sum_{k=1}^n dA_k^a$  – сума елементарних робіт активних сил,  $\sum_{k=1}^n dA_k^r$

– сума елементарних робіт реакцій в'язей.

Отже зміна кінетичної енергії системи залежить від роботи як активних сил, так і реакцій в'язей. Уведемо поняття ідеальної механічної системи, для якої наявність в'язей не впливає на зміну кінетичної енергії під час її руху. Для таких в'язей виконується умова:

$$\sum_{k=1}^n dA_k^r = 0 . \quad (23.21)$$

**Стационарні в'язі називають ідеальними, якщо сума робіт усіх реакцій в'язей на елементарному переміщенні системи дорівнює нулю.**

Для механічної системи, на яку накладені ідеальні в'язі, маємо

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^a \quad \text{або} \quad T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^a . \quad (23.22)$$

### 23.5. Силове поле

Розглянемо сили, які залежать від положення матеріальної точки в просторі.

**Силевим полем називають частину простору, в кожній точці якого на розміщену в ньому матеріальну точку діє сила, однозначно визначена за величиною та напрямом у довільний момент часу.**

Таким чином, у силовому полі має бути відома одна векторна функція  $\vec{F}$ , що залежить від радіуса-вектора точки  $\vec{r}$  та часу  $t$

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t),$$

або три скалярні функції – проєкції сили  $\vec{F}$  на координатні осі

$$F_x = F_x(x, y, z, t), F_y = F_y(x, y, z, t), F_z = F_z(x, y, z, t).$$

Якщо сила  $\vec{F}$  явно залежить від часу  $t$ , силове поле називають нестационарним, якщо сила  $\vec{F}$  не залежить від  $t$ , силове поле називають стаціонарним. Надалі будемо розглядати лише стаціонарні силові поля, коли сила залежить від положення точки, тобто від її радіуса-вектора  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , а її проєкції є функціями координат точки:

$$F_x = F_x(x, y, z), F_y = F_y(x, y, z), F_z = F_z(x, y, z). \quad (23.23)$$

Звернемо увагу на дві властивості таких полів.

1. Робота сил стаціонарного силового поля в загальному випадку залежить від початкового  $M_1$  та кінцевого  $M_2$  положень й траєкторії та не залежить від закону руху матеріальної точки по траєкторії.

2. Має місце рівність

$$A_{12} = -A_{21}, \quad (23.24)$$

де  $A_{12}$  – робота сил стаціонарного поля під час руху матеріальної точки від  $M_1$  до  $M_2$ ,  $A_{21}$  – робота сил поля під час руху



точки по тій самій траєкторії в зворотному напрямку від  $M_2$  до  $M_1$ .

Серед стаціонарних силових полів важливе місце займають поля, робота сил яких не залежить від траєкторії руху точки та визначається лише положенням початкової й кінцевої точок шляху. Такі силові поля називають потенціальними силовими полями. Згідно з визначенням для потенціальних сил робота не залежить від шляху і має місце рівність

$$A_{12}^I = A_{12}^{II} = A_{12}, \quad (23.25)$$

де I та II – довільні траєкторії, по яких матеріальна точка може перейти від  $M_1$  до  $M_2$ , а  $A_{12}$  – загальне значення роботи.

Роботу сили  $\vec{F}$  на переміщенні  $M_0M_1$  визначають за формулою

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (23.26)$$

Обчислити інтеграл, що стоїть справа, не знаючи закону руху, можна тоді, коли сила залежить від координат точки. Але якщо вираз, що стоїть під знаком інтеграла, буде повним диференціалом деякої функції  $U(x, y, z)$ , тобто

$$dA = dU(x, y, z) \text{ або } F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x, y, z), \quad (23.27)$$

то роботу  $A_{(M_0M_1)}$  можна обчислити, не знаючи траєкторії руху точки  $M$ .

**Функцію  $U(x, y, z)$ , диференціал якої дорівнює елементарній роботі ( $dU = dA$ ), називають силовою функцією.**

Якщо у формулу (23.27) підставити вираз для  $dA$  з (23.26), то отримаємо

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dU(x, y, z) = U_1 - U_0, \quad (23.28)$$

де  $U_1(x, y, z)$  та  $U_0(x, y, z)$  – значення силової функції в точках  $M_1$  та  $M_0$  поля.

**Отже, робота потенціальної сили дорівнює різниці значень силової функції в кінцевій та початковій точках шляху та не залежить від вигляду траєкторії руху точки.**

Під час переміщення точки по замкнутій траєкторії робота потенціальної сили дорівнює нулю.

Якщо встановлено, що співвідношення (23.27) має місце, то силову функцію визначають з виразу:

$$U = \int dA + C \quad \text{або} \quad U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C. \quad (23.29)$$

Постійна інтегрування  $C$  може мати довільні значення, які визначають з початкових умов. Прикладом потенціальних сил є сили ваги, пружності та тяжіння. Покажемо, що для цих сил існують силові функції та знайдемо їх.

1. Для сили ваги, якщо вісь  $Oz$  спрямована вертикально вгору,  $dA = -Gdz$ , звідси, вважаючи  $U = 0$  при  $t = 0$  (нульова точка на початку системи координат), одержимо:

$$U = \int dA + C = -\int Gdz + C = -Gz + C = -Gz \quad (23.30)$$

(так як при  $z = 0$   $U = 0$ ).

2. Для пружної сили, що діє вздовж осі  $Ox$ ,  $dA = -cxdx$ , звідси, вважаючи  $U = 0$  при  $x = 0$ , одержимо:

$$U = \int dA + C_1 = -\int cxdx + C_1 = -\frac{cx^2}{2} + C_1 = -\frac{cx^2}{2} \quad (23.31)$$

(так як при  $x = 0$   $U = 0$ ).

3. Для сили тяжіння  $dA = kmd\left(\frac{1}{r}\right) = mgR^2 d\left(\frac{1}{r}\right)$ . Вважаючи,

що нульова точка розміщена в нескінченності, одержимо:

$$U = \int dA + C = mgR^2 \int d\left(\frac{1}{r}\right) + C = mgR^2 \frac{1}{r}, \quad (23.32)$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

### 23.6. Поверхні рівня. Силові лінії

Якщо розглядати точки потенціального поля, в яких силова функція має одне і теж значення, наприклад  $U = C$ , то всі ці точки лежать на поверхні, яку називають поверхнею однакового

рівня або поверхнею рівня. Рівняння поверхні рівня має вигляд

$$U(x, y, z) = C.$$

Відзначимо деякі властивості поверхні рівня.

1. Сила в потенціальному силовому полі завжди перпендикулярна до площини, дотичної до поверхні рівня в даній точці.

Візьмемо поверхню рівня  $U = C$  і на ній дві точки  $M$

та  $M_1$  (Рис. 23.10). Запишемо елементарну роботу сили  $\vec{F}$  на переміщенні  $d\vec{s}_1$  між цими точками:

$$dA = F ds_1 \cos \angle(\vec{F}, \overline{MM_1}).$$

З другого боку

$$dA = U(M_1) - U(M) = C - C = 0.$$

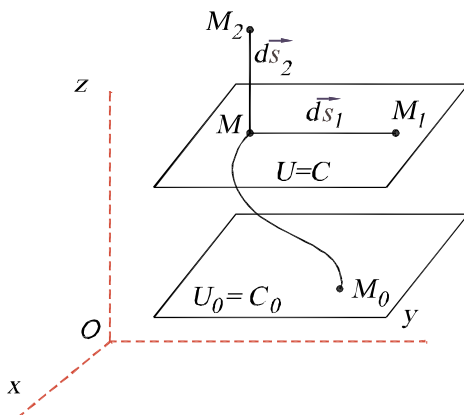


Рисунок 23.10

Таким чином,  $F \neq 0$ ,  $ds_1 \neq 0$ , тоді  $\cos \angle(\vec{F}, \overline{MM_1}) = 0$ , тобто кут між силою  $\vec{F}$  та переміщенням  $\overline{MM_1}$ , що лежить у дотичній до поверхні рівня площині, буде прямим.

2. Робота сили дорівнює нулю, якщо початкова та кінцева точки переміщення лежать на одній поверхні рівня

$$A = U - U_0 = C - C = 0. \quad (23.33)$$

3. Сила в потенціальному силовому полі завжди напрямлена у бік зростання значення силової функції.

Для доведення цієї властивості візьмемо точку  $M_2$  на перпендикулярі до поверхні рівня в напрямку збільшення значення силової функції (Рис. 23.10).

Тоді елементарну роботу на елементарному переміщенні  $MM_2$  запишемо так:

$$dA = F ds_2 \cos \angle(\vec{F}, \overline{MM_2}) = C_2 - C > 0,$$

оскільки  $C_2 > C$ .

Звідси випливає, що  $\cos \angle(\vec{F}, \overline{MM_2}) > 0$ , тому сила  $\vec{F}$  напрямлена по  $MM_2$  у бік зростання значення силової функції.

Поряд з поверхнями рівня в силовому полі використовують поняття **силової лінії**, тобто лінії, у кожній точці якої сила напрямлена по дотичній до неї (Рис. 23.11).

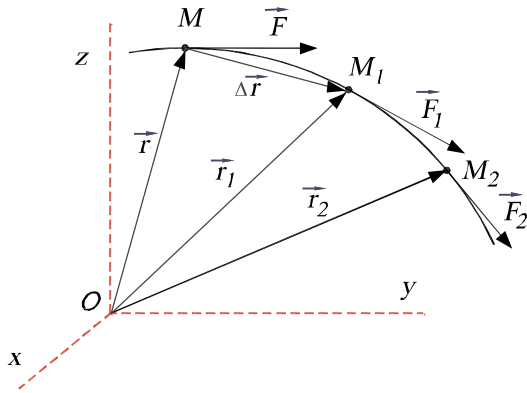


Рисунок 23.11

Оскільки вектор  $d\vec{r}$  з проєкціями на осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  завжди напрямлений по дотичній до кривої, то з умови паралельності  $d\vec{r}$  та  $\vec{F}$  (тобто  $\vec{F}_x \parallel dx$ ;  $\vec{F}_y \parallel dy$ ;  $\vec{F}_z \parallel dz$ ) витікає, що

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}. \quad (23.34)$$

Ці диференціальні рівняння відносно  $x$ ,  $y$ ,  $z$  є диференціальними рівняннями силової лінії.

### 23.7. Потенціальна енергія

Для потенціальних сил вводять поняття потенціальної енергії, як величини, що характеризує "запас роботи", яким володіє матеріальна точка в даній точці силового поля. Щоб порівнювати між собою ці "запаси роботи", необхідно вибрати точку, в якій "запас роботи" дорівнює нулю.

**Потенціальною енергією матеріальної точки в положенні  $M$  називають скалярну величину  $\Pi$ , яка дорівнює тій роботі, що виконують сили поля при переміщенні точки із положення  $M$  у нульове положення:**

$$\Pi = A_{(MO)}. \quad (23.35)$$

За визначенням потенціальна енергія  $\Pi$  залежить від координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки  $M$ , тобто  $\Pi = \Pi(x, y, z)$ .

Будемо вважати, що нульові точки для функції  $\Pi(x, y, z)$  та  $U(x, y, z)$  збігаються.

Тоді  $U_0 = 0$  і за формулою  $A_{(MO)} = U_0 - U = -U$ , де  $U$  – значення силової функції в точці  $M$  поля. Звідси

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z). \quad (23.36)$$

Тобто потенціальна енергія в довільній точці силового поля дорівнює значенню силової функції в цій точці, взятій з оберненим знаком.

Звідси видно, що, розглядаючи всі властивості потенціального силового поля, замість силової функції можна користуватися поняттям потенціальної енергії.

Роботу потенціальної сили можна записати так:

$$A_{(M_1M_2)} = \Pi_0 - \Pi. \quad (23.37)$$

**Тобто робота потенціальної сили дорівнює різниці значень потенціальної енергії рухомої точки в початковому та кінцевому її положеннях.**

Потенціальну енергію для відомих нам потенціальних сил можна знайти з рівностей (23.30) – (23.32), враховуючи, що  $\Pi = -U$ :

1. Для сили ваги  $\Pi = Gz = mgh$ ;
2. Для сили пружності  $\Pi = \frac{cx^2}{2}$ ;
3. Для сили тяжіння  $\Pi = mgR^2 \frac{1}{r}$ .

### 23.8. Закон збереження механічної енергії

Припустимо, що всі зовнішні та внутрішні сили, які діють на систему, потенціальні. Тоді для кожної точки системи робота прикладених сил дорівнює

$$A_k = \Pi_{k0} - \Pi_k.$$

Тобто, для всіх зовнішніх та внутрішніх сил

$$\sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \Pi_{k0} - \sum_{k=1}^n \Pi_k = \Pi_0 - \Pi,$$

де  $\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k$  потенціальна енергія всієї системи.

Підставивши отриманий вираз у (23.17) , одержимо

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$$

або 
$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const} . \quad (23.38)$$

**Отже, у разі руху під дією потенціальних сил сума кінетичної та потенціальної енергій системи в кожній точці залишається сталою величиною.**

У цьому й полягає **закон збереження механічної енергії**.

Величину  $T + \Pi$  називають повною механічною енергією системи.

Якщо серед сил, які діють на систему, будуть непотенціальні сили, наприклад сили тертя, то повна механічна енергія під час руху буде зменшуватись та переходити в інші види енергії, наприклад у теплову.

### **Контрольні запитання**

1. Що називають кінетичною енергією точки та системи?
2. Запишіть вирази для визначення кінетичної енергії при поступальному, обертальному та плоскопаралельному рухах твердого тіла.
3. Як визначити кінетичну енергію у випадку сферичного руху твердого тіла?
4. Сформулюйте теореми про зміну кінетичної енергії вільної та невільної точки.
5. Запишіть вираз теореми про зміну кінетичної енергії системи в диференціальній та інтегральній формах.
6. Які в'язі називають ідеальними?

7. Що називають силовим полем?
8. Сформулюйте властивості стаціонарних силових полів.
9. Що називають потенціальною енергією точки?
10. Як визначити потенціальну енергію для сил ваги, пружності та тяжіння?
11. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.



## Глава 24. Динаміка твердого тіла

### 24.1. Основні задачі динаміки твердого тіла

Систему матеріальних точок, в якій відстань між двома довільними точками залишається сталою під час руху, називають незмінною системою. Якщо точки системи розміщені неперервно, тобто суцільно заповнюють область простору системи, то таку незмінну систему називають абсолютно твердим тілом.

Завдяки незмінності відстаней між окремими частинами, абсолютно тверде тіло є механічною системою, що відрізняється від інших систем особливими властивостями, наприклад, сталістю моментів інерції. Тому динаміку твердого тіла розглядають окремо.

У статичі ми розглянули умови рівноваги системи сил, що прикладені до абсолютно твердого тіла, та умови, при яких тверде тіло перебуває у стані рівноваги. Рівняння руху твердого тіла, визначення кінематичних характеристик точок твердого тіла розглянуті у кінематиці. Під час вивчення динаміки твердого тіла виникають більш складні задачі, які ділять на дві групи. **До першої групи належать задачі**, в яких за заданим рухом твердого тіла необхідно знайти систему сил, під дією якої відбувається цей рух. **До другої групи належать задачі**, в яких за відомими силами, що діють на тверде тіло, необхідно, враховуючи початкові умови, знайти закон руху тіла, а для невільного тіла ще і реакції в'язей.

### 24.2. Поступальний рух твердого тіла

Нехай тверде тіло поступально рухається відносно нерухомої інерціальної системи відліку  $Oxyz$ . Візьмемо ще одну систему координат  $Cx_1y_1z_1$ , з'єднану з твердим тілом (Рис. 24.1). Система рухається разом з тілом поступально. Початок системи – в центрі мас твердого тіла – в точці  $C$ . Координати центра мас тіла будуть функціями часу:

$$x_C = f_1(t); y_C = f_2(t); z_C = f_3(t). \quad (24.1)$$

Звідси випливає, що відносно поступально рухомої системи координат  $Cx_1y_1z_1$ , тіло перебуває в стані спокою. Отже, кутова швидкість та моменти кількості руху тіла відносно центра мас дорівнюють нулю й згідно з теоремою про зміну кінетичного моменту

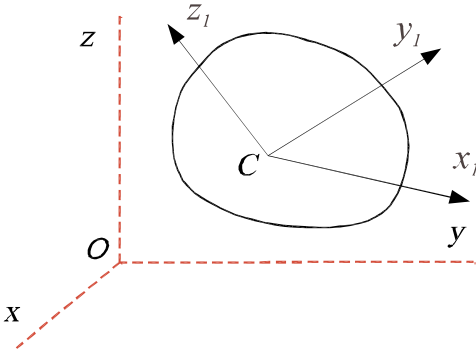


Рисунок 24.1

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e$$

(якщо  $\vec{K}_C = 0$  то  $\vec{M}_C^e = 0$ ).

Якщо врахувати, що початкова кутова швидкість тіла для поступального руху дорівнює нулю, тобто  $\omega_0 = 0$ , то будемо мати необхідні та достатні умови поступального руху твердого тіла.

**Для поступального руху твердого тіла необхідно та достатньо, щоб головний момент усіх зовнішніх сил відносно центра мас тіла та початкова кутова швидкість тіла дорівнювали нулю.**

Для одержання диференціальних рівнянь поступального руху твердого тіла скористаємося теоремою про рух центра мас

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e,$$

$$\text{або} \quad M\dot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M\dot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M\dot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e, \quad (24.2)$$

де  $x_C, y_C, z_C$  – координати центра мас у рухомій системі відліку,

$M$  – маса твердого тіла,  $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e$ ,  $\sum_{k=1}^n F_{ky}^e$ ,  $\sum_{k=1}^n F_{kz}^e$  – проекції зовнішніх сил на нерухомі осі координат.

Для розв'язку першої задачі динаміки координати центра мас є відомими функціями часу (24.1). Взявши від них другі похідні по часу ( $\ddot{x}_C$ ,  $\ddot{y}_C$ ,  $\ddot{z}_C$ ) та використавши (24.2), одержимо проекції головного вектора зовнішніх сил, його модуль та напрямні косинуси:

$$R_x^e = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad R_y^e = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad R_z^e = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e ;$$

$$R^e = \sqrt{(R_x^e)^2 + (R_y^e)^2 + (R_z^e)^2} ;$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x^e}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y^e}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z^e}{R}.$$

Для розв'язку другої задачі динаміки відомі  $R_x^e$ ,  $R_y^e$ ,  $R_z^e$ , а співвідношення (24.2) є диференціальними рівняння руху. Їх розв'язок при початкових умовах визначить рух центра мас (24.1)

$$x_C = f_1(t, C_1, C_2); \quad y_C = f_2(t, C_3, C_4);$$

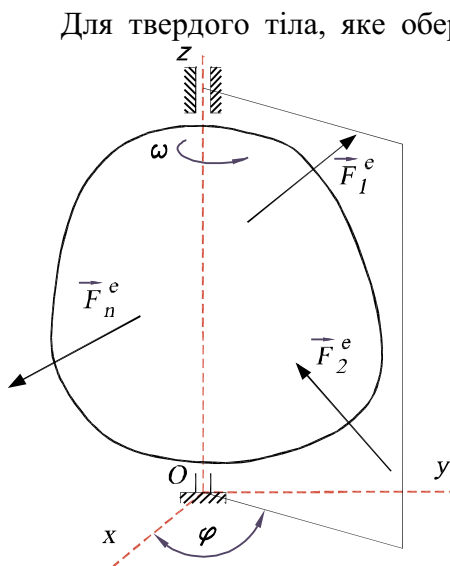
$$z_C = f_3(t, C_5, C_6),$$

де  $C_1, C_2 \dots C_6$  – невідомі сталі інтегрування, які визначають з початкових умов: при  $t = 0$

$$x_C = x_{C_0}, \quad \dot{x}_C = \dot{x}_{C_0}, \quad y_C = y_{C_0},$$

$$\dot{y}_C = \dot{y}_{C_0}, \quad z_C = z_{C_0}, \quad \dot{z}_C = \dot{z}_{C_0}.$$

### 24.3. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі



Для твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі (Рис. 24.2) під дією системи зовнішніх сил:  $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$ , запишемо теорему про зміну кінетичного моменту відносно осі  $Oz$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e). \quad (24.3)$$

Кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої осі,

$$K_z = I_z \omega = I_z \frac{d\varphi}{dt}.$$

**Рисунок 24.2**

Підставивши значення  $K_z$  в (24.3), одержимо **диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла**

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e). \quad (24.4)$$

З (24.4) видно, що добуток моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює обертальному моменту

$$I_z \varepsilon = M_z^e, \quad (24.5)$$

де  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$  – кутове прискорення твердого тіла;

$M_z^e = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e)$  – обертальний момент зовнішніх сил.

Рівність (24.5) показує, що за постійного обертального моменту  $M_z^e$ , чим більший момент інерції тіла, тим меншим є кутове прискорення й навпаки. Отже, момент інерції тіла для обертального руху відіграє таку ж роль, як маса тіла для поступального руху.

Рівняння (24.4) дає змогу: 1) знаючи обертальний момент, знайти  $\varphi = f(t)$  – закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі; 2) знаючи закон обертального руху, тобто  $\varphi = f(t)$ , знайти обертальний момент  $M_z^e$ .

Під час розв'язку другої задачі необхідно пам'ятати, що в загальному випадку  $M_z^e$  залежить від  $t$ ,  $\varphi$  та  $\dot{\varphi} = \omega$ . Для вивчення обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі можна використовувати теорему про зміну кінетичної енергії тіла.

Відзначимо такі окремі випадки:

1. Якщо  $M_z^e = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e) = 0$ , то  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ ,

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = const$ ,  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ , тобто тіло обертається рівномірно зі сталою кутовою швидкістю.

2. Якщо  $M_z^e = const$ , то і  $\varepsilon = const$ , тобто обертальний рух рівнозмінний.

#### 24.4. Фізичний та математичний маятники

**Фізичним маятником називають тверде тіло, яке має можливість здійснювати коливний рух навколо нерухомої осі під дією сили ваги.**

Проведемо через центр ваги  $C$  тіла площину, перпендикулярну до осі обертання. Точку перетину цієї площини з віссю обертання називають точкою підвісу. Виберемо початок координат у точці підвісу (у точці  $O$ ) (Рис. 24.3).

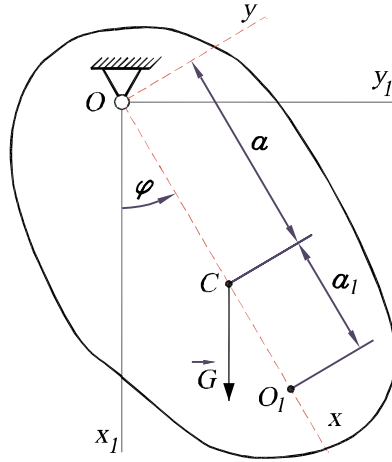


Рисунок 24.3

Вісь  $Oz$  сумістимо з віссю обертання, осі  $Ox$  та  $Oy$  розмістимо в площині, що проходить через центр ваги тіла та точку підвісу. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо осі  $Oz$  має такий вигляд:

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e,$$

де  $\varphi$  – кут між нерухомою віссю  $Ox_1$  та лінією  $OC$ .

У цьому випадку  $M_z^e = -Gas \sin \varphi = -Mga \sin \varphi$ . Тоді диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла запишемо так:

$$I_z \cdot \ddot{\varphi} = -Mga \sin \varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z} \sin \varphi = 0.$$

Розглянемо випадок малих коливань, для яких можна вважати, що  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тоді записане рівняння набуде вигляду:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z} \varphi = 0$$

або

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \tag{24.6}$$

де  $k^2 = \frac{Mga}{I_z}$ . Це диференціальне рівняння вільних прямо-

лінійних коливань точки і його загальний розв'язок

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Якщо при  $t = 0$  маятник відхилений від положення рівноваги на малий кут  $\varphi = \varphi_0$  і відпущений без початкової кутової швидкості ( $\omega_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ ), то сталі інтегрування дорівнюють:  $C_1 = \varphi_0, C_2 = 0$ . **Закон малих коливань маятника** при таких початкових умовах

$$\varphi = \varphi_0 \cos(kt).$$

Отже, **малі коливання фізичного маятника є гармонійними коливаннями**. Період малих гармонійних коливань фізичного маятника визначають за формулою:

$$T_\Phi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}}. \quad (24.7)$$

Як бачимо, період коливань фізичного маятника не залежить від початкового кута  $\varphi_0$ . Цей результат наближений, оскільки було прийнято, що  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Якщо проінтегрувати диференціальне рівняння руху без наближень, то період  $T_\Phi$  буде залежати від  $\varphi_0$  і в першому наближенні залежність для періоду малих коливань можна записати так

$$T_\Phi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \dots\right).$$

**Математичним маятником називають вантаж малих розмірів, підвішений на нерозтяжній нитці довжиною  $\ell$ , який має можливість здійснювати коливальний рух навколо нерухомої точки підвісу під дією сили ваги.**

Для математичного маятника

$$I_z = m\ell^2 = \frac{G}{g} \ell^2, a = OC = \ell \quad (\text{Рис. 24.4}).$$

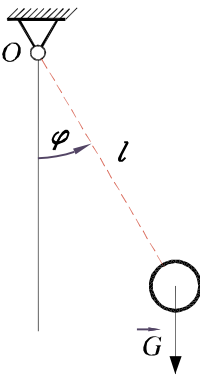


Рисунок 24.4

Підставивши цю залежність у (24.6),

отримаємо диференціальне рівняння руху математичного маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I_z} \varphi = 0,$$

або 
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0. \quad (24.8)$$

Ураховуючи, що  $k = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , для періоду малих коливань математичного маятника отримаємо:

$$T_m = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (24.9)$$

З порівняння формул (24.7) та (24.9) видно, що для

$$\ell_1 = \frac{I_z g}{Ga} = \frac{I_z}{ma} \quad (24.10)$$

період коливань математичного маятника дорівнює періоду коливань фізичного маятника. **Довжину  $\ell_1$  такого математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань фізичного маятника, називають зведеною довжиною фізичного маятника.**

Точку  $O_1$ , що розміщена від осі підвісу на відстані  $OO_1 = \ell_1 = a + a_1$ , називають центром гойдання фізичного маятника. За теоремою Гюйгенса  $I_z = I_C + Ma^2$ . Тоді формула (24.10) набуде вигляду:

$$\ell_1 = \frac{I_z}{Ma} = \frac{I_C}{Ma} + \frac{Ma^2}{Ma} = \frac{I_C}{Ma} + a = a_1 + a, \quad (a_1 = \frac{I_C}{Ma}).$$

Звідси виходить, що відстань  $OO_1$  завжди більша від  $OC = a$ , тобто, центр гойдання фізичного маятника завжди роз-



міщений нижче від його центра мас.

Якщо поміняти місцями точку підвісу та центр гойдання фізичного маятника, то зведену довжину  $\ell_2$  запишемо так:

$$\ell_2 = O_1C + \frac{I_C}{M \cdot O_1C} = \frac{I_C}{Ma} + a = \ell_1 = a_1 + \frac{I_C}{Ma_1} = a_1 + a,$$

де  $a = \frac{I_C}{Ma_1}$ .

Отже, точки  $O$  та  $O_1$  взаємозамінні. Якщо точка  $O$  – точка підвісу фізичного маятника, точка  $O_1$  – центр його гойдання; то зробивши точку  $O_1$  точкою підвісу, отримаємо центр гойдання фізичного маятника в точці  $O$ . При цьому період коливань фізичного маятника залишається без зміни. Цю властивість фізичного маятника використовують у зворотному маятнику Картера для визначення прискорення сили тяжіння у різних точках земної поверхні.

### 24.5. Експериментальне визначення моментів інерції

Розглянемо один із способів експериментального визначення моментів інерції неоднорідних твердих тіл або тіл складної конфігурації – спосіб крутильних коливань.

Тіло, для якого необхідно визначити момент інерції, підвішують на пружний стержень або струну так, щоб центр мас тіла був розміщений на продовженні осі стержня (Рис. 24.5).

Закрутивши стержень, жорстко зв'язаний з тілом, на малий кут, ви-

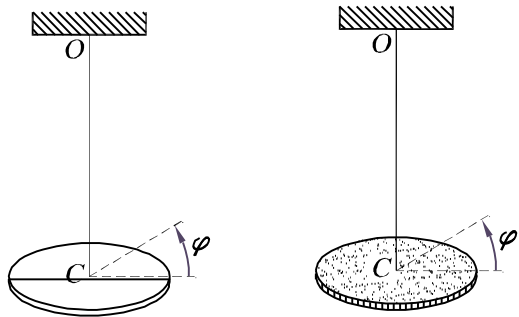


Рисунок 24.5

мірюють період малих коливань системи. Для малого кута закручування пружний момент пропорційний куту закручування. Диференціальне рівняння крутильних коливань системи матиме вигляд:

$$I_C \cdot \ddot{\varphi} = -k\varphi,$$

де  $k$  – коефіцієнт, що характеризує пружні властивості стержня (струни).

Період коливань системи дорівнює

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C}{k}}. \quad (24.11)$$

Після цього на той самий стержень (струну) підвішують тіло, момент інерції якого відомий і дорівнює  $I_C^*$  та виміряють період коливань

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{I_C^*}{k}}. \quad (24.12)$$

Виключивши з рівностей (24.11) та (24.12) невідомий коефіцієнт  $k$ , одержимо формулу для визначення моменту інерції тіла

$$I_C = I_C^* \left( \frac{T}{T^*} \right)^2.$$

## 24.6. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельний рух твердого тіла можна розглядати як рух центра мас тіла та рух тіла відносно центра мас. Під час такого руху центр мас тіла рухається паралельно до нерухомої площини, а рух відносно центра мас є обертальним рухом твердого тіла відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до нерухомої площини.

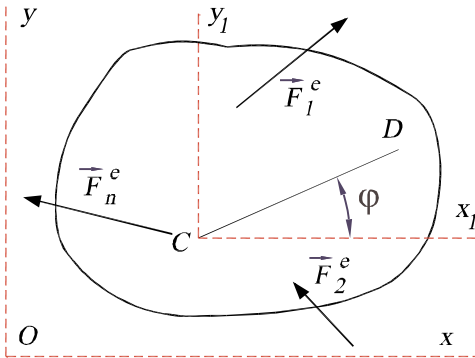


Рисунок 24.6

На рис. 24.6 зображено переріз тіла площиною, паралельною до площини руху. Центр мас тіла розміщений у площині перерізу.

У цій самій площині на тіло діє система зовнішніх сил  $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$ . Тоді рівняння руху точки  $C$  запишемо відповідно до теореми про рух центра мас системи

$$M \cdot \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (24.13)$$

Закон обертального руху навколо центра  $C$  визначається рівнянням (24.5), оскільки теорема, за якою одержано це рівняння, справедлива й для руху системи навколо центра мас. Проектуючи обидві частини рівності (24.13) на координатні осі, дістанемо:

$$Ma_{Cx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad Ma_{Cy} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad I_C \varepsilon = \sum_{k=1}^n m_C (\vec{F}_k^e); \quad (24.14)$$

або

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad I_C \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_C (\vec{F}_k^e). \quad (24.15)$$

**Залежності (24.15) є диференціальними рівняння плоского (плоскопаралельного) руху твердого тіла.** Якщо рух твердого тіла задано, тобто відомо  $x_C = f_1(t), y_C = f_2(t), \varphi = f_3(t)$ , то після подвійного диференціювання цих функцій та подальшої підстановки в (24.15), знайдемо сили, під дією яких проходить рух тіла.

Якщо відомі  $F_{kx}^e, F_{ky}^e, M_C^e$ , то рівняння (24.15) будуть утво-

ривати систему трьох диференціальних рівнянь плоского руху тіла. Після розв'язку цих рівнянь і визначення сталих інтегрування, одержимо закон плоского руху твердого тіла

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Якщо тіло здійснює невірний рух, то до заданих сил необхідно додати реакції в'язей. Тоді диференціальні рівняння плоского руху набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + R_x; \\ M\ddot{y}_C &= \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + R_y; \\ I_C\ddot{\varphi} &= M_C^e + M_C^R. \end{aligned} \quad (24.16)$$

де  $R_x$ ,  $R_y$  – суми проєкцій усіх реакцій на осі  $Cx$ ,  $Cy$ ;

$M_C^R$  – сума моментів всіх реакцій відносно центра мас.

Для розв'язку другої задачі динаміки до рівнянь (24.16) необхідно додати рівняння в'язей. Зауважимо, що деколи замість одного з диференціальних рівнянь (24.16) доцільно застосувати теорему про зміну кінетичної енергії.

### Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачі динаміки твердого тіла.
2. Запишіть диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла.
3. Запишіть диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла.
4. Що називають фізичним та математичним маятниками ?
5. Як визначити період малих коливань фізичного та математичного маятників?

6. Як експериментально визначити моменти інерції неоднорідних твердих тіл або тіл складної конфігурації ?

7. Запишіть диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла.

## Глава 25. Принцип Д'Аламбера

### 25.1. Метод кінестатики для точки

Усі методи розв'язування задач динаміки, що ми досі розглядали, ґрунтуються на рівняннях, що випливають з законів Ньютона безпосередньо або ж з загальних теорем, які є наслідком цих законів. Однак цей шлях не єдиний. Виявляється, що рівняння руху або умови рівноваги механічної системи можна отримати, поклавши в основу замість законів Ньютона інші загальні положення, які називають **принципами механіки**. У багатьох випадках застосування цих принципів дозволяє знайти більш ефективні методи розв'язання відповідних задач. У цій главі буде розглянуто один з загальних принципів механіки, який називають принципом Д'Аламбера. Особливо зручний цей принцип (метод кінестатики), якщо потрібно визначити реакції в'язей, коли відомий закон руху точки та активні сили.

Розглянемо цей принцип. Для цього запишемо рівняння

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

що виражає основний закон динаміки для невільної точки у вигляді:

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0, \quad (25.1)$$

де  $\vec{F}$  – рівнодійна всіх активних сил,  $\vec{R}$  – рівнодійна всіх реакцій в'язей.

Увівши позначення

$$\vec{F}^{\text{ін}} = -m\vec{a}, \quad (25.2)$$

дістанемо  $\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^{\text{ін}} = 0$ . (25.3)

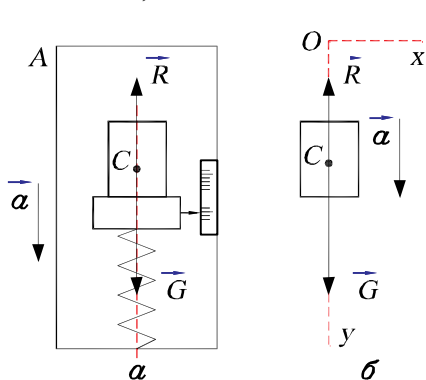
Силу  $\vec{F}^{\text{ін}}$ , вектор якої дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення та напрямлений протилежно до вектора прискорення, називають силою інерції (або даламберовою силою інерції).

Залежність (25.3) еквівалентна другому закону Ньютона та виражає принцип Д'Аламбера для однієї матеріальної точки: **якщо в будь-який момент часу до рівнодійної  $\vec{F}$  усіх активних сил і рівнодійної  $\vec{R}$  усіх реакцій в'язей, які діють на точку, додати силу інерції  $\vec{F}^{\text{ін}}$  точки, то отримана система сил буде зрівноваженою.**

Застосовуючи принцип Д'Аламбера, слід пам'ятати, що до матеріальної точки прикладені тільки сили  $\vec{F}$  і  $\vec{R}$ , тобто активна сила та реакція. Сила ж інерції  $\vec{F}^{\text{ін}}$  до точки не прикладена. Тому рівняння (25.3) не можна розглядати як умову рівноваги (спокою) точки. Метод кінетостатики є лише формальним прийомом зведення рівняння динаміки до рівняння статички, однак під час розв'язання практичних задач такий прийом має ряд переваг.

## 25.2. Явище невагомості

Розглянемо явище, яке за існуючою традицією, хоч і не цілком точно, називають невагомістю. Припустимо, що платформа



**Рисунок 25.1**

А рухається вертикально вниз із заданим прискоренням  $\vec{a}$  (Рис. 25.1).

На платформі встановлена пружинна вага, на якій лежить вантаж С. Стрілка ваги фіксує силу, з якою вантаж тисне на вагу. Коли платформа перебуває в спокої (або рухається рівномірно), стрілка ваги показує на шкалі дійсну вагу вантажу С.

З'ясуємо, який тиск чинить вантаж на вагу, якщо платформа А рухається вниз з прискоренням  $\vec{a}$ . На вантаж С діють дві

сили: сила ваги  $\vec{G} = m\vec{g}$  і реакція  $\vec{R}$  з боку пружинної ваги. Рівняння руху вантажу має вигляд

$$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g} \quad (25.4)$$

або, в проекції на вісь  $Oy$ ,

$$ma = -R + mg.$$

Отже, величина реакції ваги

$$R = m(g - a). \quad (25.5)$$

Таку ж величину має спрямований униз тиск  $\vec{R}'$ , який тіло чинить на вагу. Деформація пружини під дією сили  $\vec{R}'$  виявиться меншою, ніж у стані рівноваги. Стрілка ваги вкаже нову "вагу" вантажу, яка дорівнює  $mg - ma$ . Її відношення до дійсної ваги складає

$$n = \frac{mg - ma}{mg} = 1 - \frac{a}{g}. \quad (25.6)$$

де  $n$  – коефіцієнт перевантаження.

Звичайно, сила тяжіння тіла до Землі не змінилася, бо гравітаційне поле Землі не залежить від того, чи рухається вантаж, чи перебуває в спокої. Змінилися лише сили взаємодії між вантажем і пружинною вагою. Якщо збільшити прискорення  $\vec{a}$ , то реакція, як це видно з (25.5), зменшиться. Нарешті, коли  $a = g$ , реакція буде дорівнювати нулю і стрілка пружинної ваги зупиниться на нульовій поділці шкали. Взаємодія між вантажем і пружинною вагою зникає. Говорять, що наступила "невагомість".

Якщо прискорення  $a$  перевищить значення  $g$ , то вантаж відірветься від пружинної ваги та буде вільно падати. Платформа, що опускається з більшим прискоренням, буде віддалятися від вантажу, що падає. Якщо ж вантаж прикріплений до пружинної ваги, то він буде рухатися разом з нею.



жинної ваги, то платформа буде тягнути його вниз, причому перевантаження стане від'ємним і сила дії вантажу на пружинну вагу виявиться спрямованою вгору.

Повернемось до стану видимої невагомості, коли перевантаження дорівнює нулю. Цей стан призводить до незвичних відчуттів у людини, яка перебуває в ліфті, у космічному кораблі або в літаку. Людина насправді перестає відчувати вагу свого тіла. **У звичайних умовах між окремими частинами людського тіла існують сили взаємодії, зумовлені масовими силами (силами ваги) і поверхневими силами (реакцією підлоги).** Ці сили, прикладені до складної системи матеріальних точок – людського тіла, викликають появу численних внутрішніх сил. Саме поява цих внутрішніх сил (натяг м'язів, реакції суглобів, тиск на нервові кінцівки вестибулярного апарату тощо) викликає у людини відчуття вагомості.

**У стані невагомості зникають внутрішні сили взаємодії між окремими частинами тіла, зникає і відчуття вагомості.** У цих умовах втрачають зміст звичні поняття "вгорі" і "внизу". Відштовхнувшись від опори, людина набуває додаткової швидкості та рухається до тих пір, поки не нашттовхнеться на перепону.

### 25.3. Метод кінетостатики для системи

Так само, як і для однієї матеріальної точки, диференціальним рівнянням руху матеріальної системи можна придати форму рівнянь статички. Цей метод часто застосовують у розрахунках, особливо для визначення динамічних реакцій опор твердого тіла.

З системи матеріальних точок розглянемо одну з масою  $m_k$ . Під дією прикладених до неї зовнішніх і внутрішніх сил  $\vec{F}_k^e$  і  $\vec{F}_k^i$  (до яких входять і активні сили, і реакції в'язей) точка отримує відносно інерціальної системи відліку певне прискорення  $\vec{a}_k$ . Тоді, враховуючи позначення (25.2), основному рівнянню

динаміки, написаному для точки системи, можна надати вигляд рівняння статики

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^{\text{ін}} \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (25.7)$$

На підставі (25.7) сформулюємо принцип Д'Аламбера для системи: **якщо в будь-який момент часу до кожної з точок системи, окрім внутрішніх і зовнішніх сил, які діють на точки системи, прикласти відповідні сили інерції, то отримана система сил буде перебувати в рівновазі і до неї можна застосувати всі рівняння статики.**

Додаючи почленно всі рівняння (25.7), отримаємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} = 0. \quad (25.8)$$

У виразі (25.8) перша сума  $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$  дорівнює головному вектору  $\vec{R}^e$  всіх зовнішніх сил (у тому числі й реакцій в'язей), які прикладені до системи, друга сума за властивостями внутрішніх сил дорівнює нулю  $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$ , остання сума  $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}}$  дорівнює головному вектору  $\vec{R}^{\text{ін}}$  сил інерції. Таким чином

$$\vec{R}^e + \vec{R}^{\text{ін}} = 0, \quad (25.9)$$

**тобто в кожний момент часу сума головних векторів зовнішніх сил і сил інерції рухомої матеріальної системи дорівнює нулю.**

Виберемо довільний полюс  $O$  і проведемо з нього до точки  $M_k$  радіус-вектор  $\vec{r}_k$  (Рис. 25.2). Якщо визначити векторні добутки кожного з рівнянь (25.7) на відповідний радіус-вектор  $\vec{r}_k$  і додати всі добутки, дістанемо

$$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i) + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{ін}}) = 0.$$

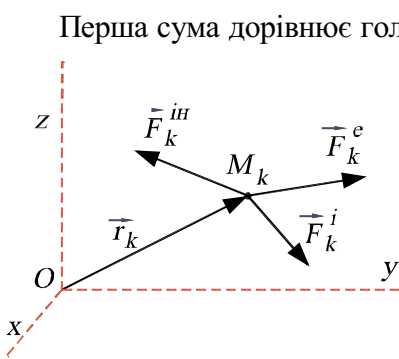


Рисунок 25.2

Тоді

$$\vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{in} = 0, \quad (25.10)$$

тобто в кожен момент часу сума головних моментів зовнішніх сил (активних сил і реакцій в'язей) та сил інерції рухомої матеріальної системи дорівнює нулю.

Якщо в рівняннях (25.9) і (25.10) зовнішні сили представити як суму активних сил і реакцій в'язей, тобто

$$\vec{F}_k^e = \vec{F}_k^a + \vec{F}_k^r, \quad (25.11)$$

то рівняння (25.9) і (25.10) набудуть вигляду:

$$\vec{R}^a + \vec{R}^r + \vec{R}^{in} = 0, \quad (25.12)$$

$$\vec{M}_O^a + \vec{M}_O^r + \vec{M}_O^{in} = 0, \quad (25.12')$$

де  $\vec{R}^r$  і  $\vec{M}_O^r$  – відповідно головний вектор реакцій в'язей і головний момент цих реакцій відносно центра  $O$ .

Двом векторним рівнянням (25.12) відповідають шість рівнянь метода кинестатики в проєкціях на осі декартових координат:

$$\begin{aligned} R_x^a + R_x^r + R_x^{in} &= 0, & M_x^a + M_x^r + M_x^{in} &= 0 \\ R_y^a + R_y^r + R_y^{in} &= 0, & M_y^a + M_y^r + M_y^{in} &= 0, \\ R_z^a + R_z^r + R_z^{in} &= 0, & M_z^a + M_z^r + M_z^{in} &= 0. \end{aligned} \quad (25.13)$$

Рух твердого тіла цілком визначається цими шістьма рівняннями кінетостатики, так само як рівновага твердого тіла цілком визначається відповідними шістьма рівняннями. Якщо систему утворюють декілька тіл, то можна скласти відповідні рівняння кінетостатики для кожного тіла зокрема.

З усього сказаного слідує, що застосування методу кінетостатики для твердого тіла вимагає передусім уміння обчислити головний вектор і головний момент його сил інерції. Знаючи їхні проекції на вибрані осі координат, потрібно скласти рівняння кінетостатики, з яких визначити невідомі величини.

#### 25.4. Головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла

Покажемо, що рівняння (25.12) є математичним записом теореми про зміну кількості руху і теореми про зміну кінетичного моменту матеріальної системи відповідно.

Дійсно, головний вектор усіх сил інерції дорівнює

$$\vec{R}^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} = -\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k,$$

бо  $\vec{a}_k = \dot{\vec{v}}_k$ . Але сума  $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = M\vec{v}_C$  є кількістю руху матеріальної системи. Отже,

$$\vec{R}^{\text{ін}} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -M\vec{a}_C, \quad (25.14)$$

тобто головний вектор усіх сил інерції точок матеріальної системи дорівнює похідній за часом від кількості руху матеріальної системи, помноженій на  $-1$ .

Якщо в (25.14) прискорення  $\vec{a}_C$  розкласти на дотичне та нормальне, то  $\vec{R}^{\text{ін}}$  розділимо на складові

$$\vec{R}_\tau^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C^\tau; \quad \vec{R}_n^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C^n. \quad (25.15)$$

Головний момент усіх сил інерції дорівнює

$$\vec{M}_O^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{ін}}) = -\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k) = -\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}).$$

Ураховуючи, що

$$\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) - \frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{v}_k = \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k),$$

бо  $\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{v}_k = 0$  (вектори  $\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_k$  та  $m_k \vec{v}_k$  паралельні), одержимо

$$\vec{M}_O^{\text{ін}} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} = -I_O \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (25.16)$$

де  $\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k)$  – кінетичний момент матеріальної системи.

**Отже, головний момент усіх сил інерції дорівнює похідній за часом від кінетичного моменту матеріальної системи, помноженій на  $-1$ .**

Підставляючи вирази (25.14) та (25.16) у рівняння (25.12), отримаємо відповідно теореми про зміну кількості руху та кінетичного моменту матеріальної системи.

Головний вектор і головний момент сил інерції знайдемо для деяких окремих випадків руху твердого тіла.

### 1. Поступальний рух.

У цьому випадку тіло ніякого обертання навколо центра  $O$  не має. Звідси робимо висновок, що  $\vec{M}_O^e = 0$ , і з рівняння (25.10) маємо  $\vec{M}_O^{\text{ін}} = 0$ . Отже, під час поступального руху сили інерції твердого тіла зводять до однієї рівнодійної, що дорівнює  $\vec{R}^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C$  і проходить через центр мас тіла.

## 2. Плоскопаралельний рух.

Нехай тіло має площину симетрії та рухається паралельно до неї. Унаслідок симетрії головний вектор і результуюча пара сил інерції, як і центр мас тіла точка  $C$ , лежать у площині симетрії. Тоді, помістивши центр зведення сил інерції в точку  $C$ , отримаємо з рівності (25.10)

$$M_C^{\text{ін}} = -\sum_{k=1}^n m_C (\vec{F}_k^e).$$

З іншого боку, з диференціального рівняння обертального руху маємо рівність  $\sum_{k=1}^n m_C (\vec{F}_k^e) = I_C \varepsilon$ . Звідси робимо висновок, що

$$M_C^{\text{ін}} = -I_C \varepsilon. \quad (25.17)$$

Таким чином, у разі плоскопаралельного руху систему сил інерції зводять до сили, яка дорівнює  $\vec{R}^{\text{ін}}$  (див.(25.14)) і прикладена в центрі мас  $C$  тіла, та до пари сил, яка лежить у площині симетрії тіла і момент якої визначають за формулою (25.17).

Знак мінус в формулі (25.17) показує, що напрям моменту протилежний до напрямку кутового прискорення тіла.

## 3. Обертання навколо осі.

Нехай тіло має площину симетрії, а вісь обертання  $Cz$  перпендикулярна до цієї площини і проходить через центр мас тіла.

Тоді даний випадок буде окремим випадком попереднього. Але при цьому  $\vec{a}_C = 0$ , отже, і  $\vec{R}^{\text{ін}} = 0$ .

Отже, в такому разі систему сил інерції зводять до однієї пари сил, яка лежить в площині, перпендикулярній до осі обертання тіла, і момент якої дорівнює

$$M_z^{\text{ін}} = -I_z \varepsilon.$$

При розв'язанні задач за формулами (25.14) і (25.17) обчислюють модулі відповідних величин, а їх напрямки вказують на рисунку до задачі.

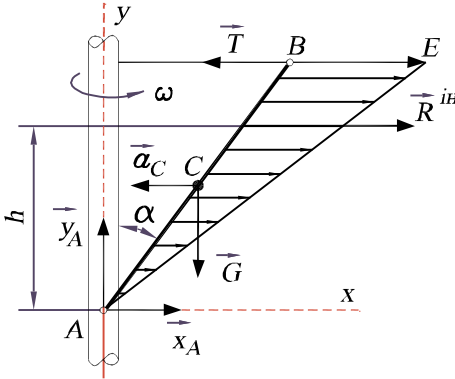


Рисунок 25.3

**Задача 25.1.** Однорідний стержень  $AB$  з довжиною  $l$  і вагою  $\vec{G}$  прикріплений шарніром  $A$  до вертикального вала, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  (Рис. 25.3).

Знайти натяг  $\vec{T}$  горизонтальної нитки, яка утримує стержень під кутом  $\alpha$  до вала.

### Розв'язок

Користуючись принципом Д'Аламбера, приєднуємо до зовнішніх сил  $\vec{G}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ , які діють на стержень, сили інерції.

Для кожного елемента стержня з масою  $\Delta m$  відцентрова сила інерції дорівнює  $\Delta m \omega^2 x$ , де  $x$  – відстань елемента від осі обертання  $Ay$ .

**Рівнодійна  $\vec{R}^{\text{ін}}$  цих розподілених за лінійним законом паралельних сил проходить через центр ваги трикутника  $ABE$ , тобто на відстані  $h = \frac{2}{3} l \cos \alpha$  від осі  $Ax$ .**

Оскільки ця рівнодійна дорівнює головному вектору сил інерції<sup>1</sup>, то з формули (25.14) одержимо

<sup>1</sup> Із статки відомо, що для будь-якої системи сил рівнодійна (якщо вона існує) дорівнює головному вектору цих сил.

$$R^{\text{ін}} = Ma_c = M\omega^2 x_c = \frac{G}{g} \omega^2 \frac{\ell}{2} \sin \alpha .$$

З рівняння статики  $\sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0$ , отримаємо

$$T\ell \cos \alpha - R^{\text{ін}}h - G\frac{\ell}{2} \sin \alpha = 0 .$$

Підставивши сюди значення  $\vec{R}^{\text{ін}}$  і  $h$ , знайдемо остаточно

$$T = G \left( \frac{\ell \omega^2}{3g} \sin \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) .$$

### Друге рішення.

Цю задачу можна розв'язати обчислюючи суму моментів сил інерції відносно центра  $A$  безпосереднім інтегруванням.

Проведемо вздовж стержня  $AB$  вісь  $A\xi$ . На кожний елемент стержня  $d\xi$ , з координатою  $\xi$  діє сила інерції, яка дорівнює  $\omega^2 x dm$ . Її момент відносно центра  $A$  дорівнює  $y\omega^2 x dm$ .

Тоді рівняння моментів буде становити

$$\sum m_A(F_K) \equiv T\ell \cos \alpha - G\frac{\ell}{2} \sin \alpha - \int_0^{\ell} \omega^2 y x dm = 0 . \quad (a)$$

Записуючи всі величини, які стоять під знаком інтеграла, через  $\xi$ , отримаємо:

$$x = \xi \sin \alpha , \quad y = \xi \cos \alpha , \quad dm = \frac{M}{\ell} d\xi .$$

---

Отже, рівнодіюча сил інерції, коли вона існує, дорівнює  $R^{\text{ін}}$ , але при поступальному русі ця рівнодіюча може не проходити через центр мас тіла, що і має місце у даному випадку.



В результаті будемо мати:

$$\int_0^{\ell} \omega^2 y x dm = \frac{M}{\ell} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^{\ell} \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} \frac{G}{g} \ell^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Підставляючи це значення у рівність (а), знаходимо для  $T$  той самий вираз, що і у попередньому розв'язку.

### Контрольні запитання

1. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для однієї матеріальної точки.
2. Охарактеризуйте явище невагомості.
3. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок та запишіть відповідні рівняння статички.
4. Як визначити сили інерції при поступальному, обертальному та плоскопаралельному рухах твердого тіла?
5. Що називають даламберовою силою інерції?

## Глава 26. Елементарна теорія гіроскопа

### 26.1. Основне припущення елементарної теорії гіроскопа

Гіроскопом називають симетричне однорідне тіло, яке здійснює рух навколо нерухомої точки  $O$ , розташованої на осі симетрії  $Oz$  (Рис. 26.1, 26.2). Вісь симетрії гіроскопа  $Oz$  є головною центральною віссю інерції. Оскільки гіроскопи є тілами обертання навколо осі  $Oz$ , то дві інші осі координат у площині, перпендикулярній до цієї осі, є головними осями інерції й мають однакові моменти інерції  $I_x = I_y$ .

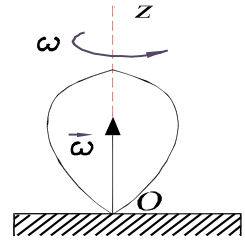


Рисунок 26.1

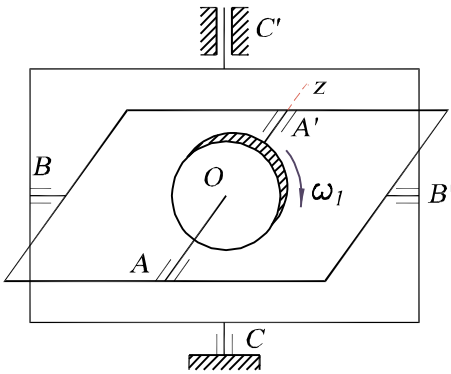


Рисунок 26.2

Прикладами гіроскопа є дзига, що має нерухому точку  $O$  (Рис. 26.1), та гіроскоп з кардановим кріпленням (Рис. 26.2).

В останньому випадку ротор обертається навколо своєї осі симетрії  $Oz$ , яка вставлена в підшипники  $A$  і  $A'$  внутрішньої рамки, що може обертатися навколо осі  $BB'$ , розміщеної в підшипниках на зовнішній рамці. Зовнішня

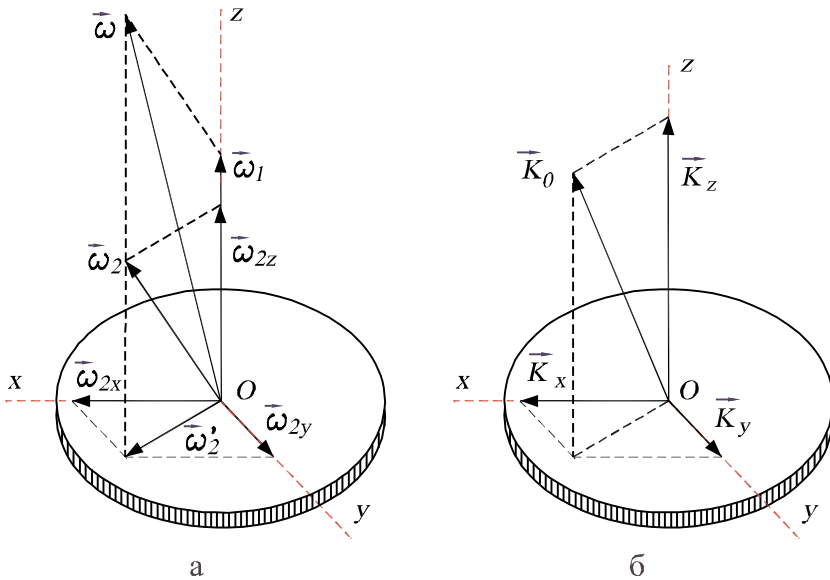
рамка може обертатися навколо нерухомої осі  $CC'$ .

Нерухому точку  $O$  гіроскопа називають точкою кріплення гіроскопа.

Наведені приклади гіроскопів є гіроскопами з трьома степенями вільності, тому що можуть здійснювати вільне обертання навколо трьох осей. Особливі властивості гіроскопів забезпечують їх широке застосування в техніці. Так, на морських суднах установлені гіроскопічні компаси, що набагато надійніші за маг-

нітні компаси; гіроскопи застосовують для визначення на рухомому об'єкті (літак, корабель, ракета) вертикалі місця, необхідної для обчислення координат об'єкта; з допомогою гіроскопів стабілізують гарматні платформи на кораблях та вагони однорейкової залізниці; створюють автопілоти для літаків, здійснюють автоматичне керування польотом ракет тощо.

Нехай гіроскоп обертається навколо своєї осі симетрії  $Oz$  з великою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$ , а ця вісь у свою чергу обертається з порівняно невеликою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$  (Рис. 26.3).



**Рисунок 26.3**

Виходячи з теорії додавання обертань навколо осей, що перетинаються, абсолютна кутова швидкість  $\vec{\omega}$  дорівнює

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (26.1)$$

Швидкість будь-якої точки гіроскопа та її проекції на осі координат визначають за залежностями

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{\ell}_k, \quad (26.2)$$

$$\begin{cases} v_{kx} = \omega_y z_k - \omega_z y_k \\ v_{ky} = \omega_z x_k - \omega_x z_k, \\ v_{kz} = \omega_x y_k - \omega_y x_k \end{cases} \quad (26.3)$$

а кінетичний момент відносно центра та відносно осей координат обчислюють за формулами

$$\begin{cases} \vec{K}_O = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\ell}_k \times \vec{v}_k), & K_x = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\ell}_k \times \vec{v}_k)_x, \\ K_y = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\ell}_k \times \vec{v}_k)_y, & K_z = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\ell}_k \times \vec{v}_k)_z. \end{cases} \quad (26.4)$$

Після підстановок з урахуванням, що осі координат є головними осями інерції ( $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ ), отримаємо (Рис. 26.3, б):

$$K_x = I_x \omega_{zx}, \quad K_y = I_y \omega_{zy}, \quad K_z = I_z (\omega_1 + \omega_{2z}). \quad (26.5)$$

### Основне припущення елементарної теорії гіроскопа.

Оскільки для гіроскопів  $I_x = I_y \approx 0,6I_z$ , а  $\omega_1 \geq 3000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ , то величинами  $\omega_{2x}, \omega_{2y}, \omega_{2z}$  порівняно з величиною  $\omega_1$  можна знехтувати та без значної похибки вважати, що вектор кінетичного моменту  $\vec{K}_O$  збігається з віссю обертання ротора гіроскопа  $Oz$ , тобто

$$K_O = I_z \omega_1 \text{ і } \vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1 = I_z \omega_1 \vec{k}, \quad (26.6)$$

де  $\vec{k}$  – одиничний орт осі  $Oz$ .

Теорію руху гіроскопа, побудовану на наведеному припущенні, називають елементарною теорією гіроскопа. Для подальшого вивчення руху гіроскопа будемо користуватися **теоремою Резаля**, яка по суті є кінематичною інтерпретацією теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи. Відповідно до цієї теореми

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e, \quad (26.7)$$

де  $\vec{M}_O^e$  – головний момент усіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему, відносно нерухомої точки  $O$ .

Як відомо, похідна за часом від будь-якого вектора є швидкістю кінця цього вектора при його переміщенні по годографу вектора. Отже  $\vec{u} = \frac{d\vec{K}_O}{dt}$  – швидкість кінця вектора  $\vec{K}_O$  по годографу цього вектора. Враховуючи це, вираз (26.7) запишемо у вигляді **теорема Резаля**:

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e, \quad (26.8)$$

тобто, **швидкість кінця вектора кінетичного моменту механічної системи дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил, що діють на систему.**

## 26.2. Вільний (астатичний) гіроскоп

Розглянемо гіроскоп з трьома степенями вільності (рис. 26.2). Якщо сума моментів усіх зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, відносно його нерухомого центра мас  $O$  дорівнює нулеві, то гіроскоп називають **астатичним** (або зрівноваженим).

Прикладом вільного (астатичного) гіроскопа є гіроскоп з кардановим кріпленням (Рис. 26.2), якщо знехтувати тертям в осях.

Для виявлення властивостей цього гіроскопа спочатку припустимо, що він не обертається навколо своєї осі, тобто перебуває в стані спокою. Якщо ударом сили, що діє миттєво, надати осі гіроскопа певну кутову швидкість  $\vec{\omega}_2$ , то надалі вісь гіроскопа буде рівномірно обертатися з цією кутовою швидкістю.

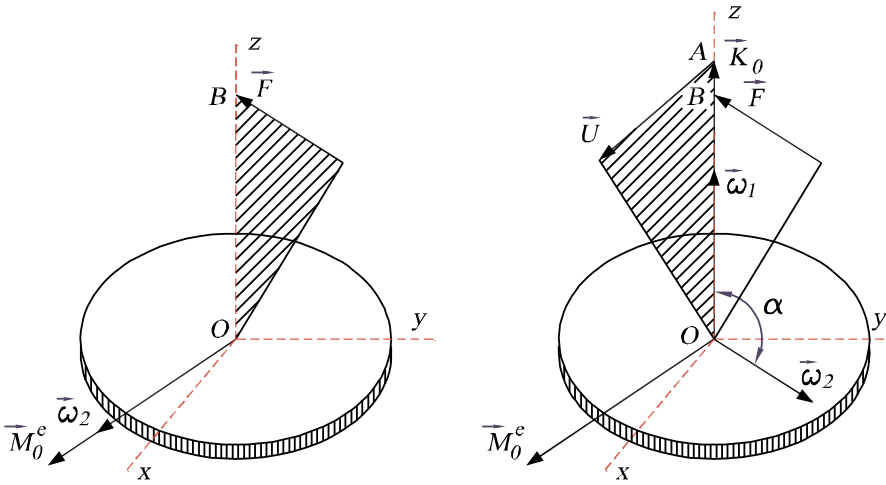
Зовсім інакше буде вести себе вісь гіроскопа під час удару, якщо він обертася навколо осі з великою кутовою швидкістю

$\vec{\omega}_1$ . У цьому випадку вісь гіроскопа залишиться практично нерухомою. Оскільки для вільного гіроскопа  $\vec{M}_O^e = 0$ , а отже  $\vec{K}_O = \overrightarrow{const}$  або  $I_z \omega_1 \vec{k} = \overrightarrow{const}$ , то вектор  $\vec{K}_O$ , який визначає напрямок осі гіроскопа  $Oz$ , зберігає в нерухомій системі координат свій напрямок. **Цю властивість зрівноваженого (вільного) гіроскопа зберігати незмінним напрямком осі обертання використовують у різних гіроскопічних приладах: гіроскопічних компасах, автопілотах тощо.**

Якщо на вісь гіроскопа буде діяти будь-яка сила, але дуже малий проміжок часу  $\tau$ , то таку дію можна розглядати як дію ударного імпульсу  $\vec{S} = \vec{F}\tau$ . Тоді за теоремою Резаля швидкість  $\vec{v}$  переміщення кінця вектора  $\vec{K}_O$  існує тільки в цей нескінченно малий проміжок часу  $\tau$ , отже можна вважати, що вісь гіроскопа практично не змінить свого напрямку. Математично це положення підтвердимо в наступному параграфі.

### 26.3. Дія сил на вісь гіроскопа

Ми розглядали рух вільного (астатичного) гіроскопа. Перейдемо до вивчення руху гіроскопа, до осі якого прикладена сила  $\vec{F}$  (Рис. 26.4). Розглянемо особливості руху осі гіроскопа в порівнянні з рухом осі такого самого тіла, що не має власного обертання навколо осі симетрії  $Oz$ .



**Рисунок 26.4**

Нехай центр тяжіння в обох випадках розташований у нерухомій точці  $O$ , тертям в якій знехтуємо. Якщо до нерухомого тіла в точці  $B$  прикладемо силу  $\vec{F}$ , то тіло буде обертатись з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$  (Рис. 26.4, а) навколо осі, перпендикулярної до площини розташування сили й осі  $Oz$ . Якщо дія сили припиниться, то тіло буде рухатися по інерції з досягнутою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$ .

Зовсім інакше веде себе гіроскоп (Рис. 26.4, б), що обертається навколо власної осі симетрії  $Oz$  з великою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$ .

За теоремою Резаля точка  $A$  (кінець вектора  $\vec{K}_O$  осі гіроскопа  $Oz$ ) почне рух зі швидкістю  $\vec{u} = \vec{M}_O^e$ . Це означає, що вісь гіроскопа буде обертатися з якоюсь кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$ , що перпендикулярна до площини розташування осі  $Oz$  і швидкості  $\vec{u}$ , причому

$$\vec{u} = \vec{\omega}_2 \times \overline{OA}$$

або 
$$\vec{M}_O^e = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O = I_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1). \quad (26.10)$$

Звідси 
$$M_O^e = \omega_2 I_z \omega_1 \sin \alpha \text{ і } \omega_2 = \frac{M_O^e}{I_z \omega_1 \sin \alpha}. \quad (26.11)$$

Обертання осі гіроскопа називають його **прецесією**. Згідно з (26.11) сформулюємо таке правило прецесії: якщо до осі гіроскопа прикласти зовнішні сили, що створюють момент відносно нерухомої точки  $O$ , то та вісь гіроскопа, по якій напрямлений кінетичний момент, почне прецесіювати в напрямку вектора головного моменту цих сил з кутовою швидкістю  $\omega_2$ , яка пропорційна головному моменту зовнішніх сил і обернено пропорційна кінетичному моменту гіроскопа.

**Формула для оцінки кута прецесії  $\varphi$  за малий проміжок часу  $\tau$  має вигляд**

$$\varphi = \omega_2 \tau = \frac{M_O^e \tau}{I_z \omega_1 \sin \alpha}. \quad (26.12)$$

З останньої формули виходить, що кут  $\varphi$  тим менший, чим більший кінетичний момент  $I_z \omega_1$  гіроскопа. Якщо цей момент дуже великий, а дія сил відбувається за нескінченно малий проміжок часу  $\tau$ , то  $\varphi$  нескінченно мала величина. Отже, підтверджено зауваження в кінці попереднього параграфу про те, що короткочасна дія сил не відхиляє вісь гіроскопа від її початкового напрямку.

#### 26.4. Прецесія гіроскопа під дією сили ваги

Розглянемо **рух гіроскопа (дзиги), поставленого під кутом  $\theta$  до вертикалі, під дією сили ваги  $\vec{G}$**  (Рис. 26.5), яка створює момент відносно нерухомої точки  $O$ .



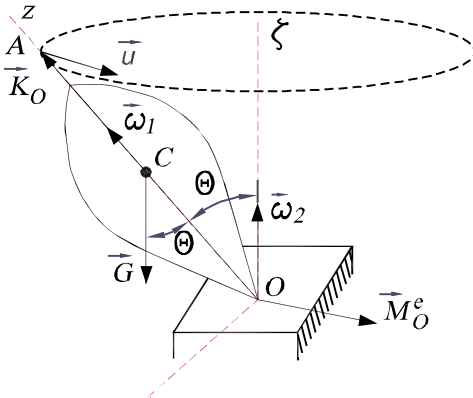


Рисунок 26.5

Цей момент  $\vec{M}_O^e$  діє в горизонтальній площині, яка перпендикулярна до площини розташування сили  $\vec{G}$  і центра  $O$ , причому

$$M_O^e = G \cdot OC \cdot \sin \theta. \quad (26.13)$$

За теоремою Резаля швидкість  $\vec{u}$  точки  $A$  кінця вектора  $\vec{K}_O$  дорівнює цьому моменту  $\vec{u} = \vec{M}_O^e$  і направлена перпендикулярно до площини осей  $Oz$  і  $O\xi$ .

Це означає, що вісь  $Oz$  разом з вектором  $\vec{K}_O$  описує коїчну поверхню навколо осі  $O\xi$  з кутовою швидкістю прецесії

$$\omega_2 = \frac{u}{K_O \sin \theta} = \frac{M_O^e}{K_O \sin \theta} = \frac{G \cdot OC \cdot \sin \theta}{I_z \omega_1 \sin \theta} = \frac{G \cdot OC}{I_z \omega_1},$$

що не залежить від кута  $\theta$ .

### 26.5. Гіроскопічний момент

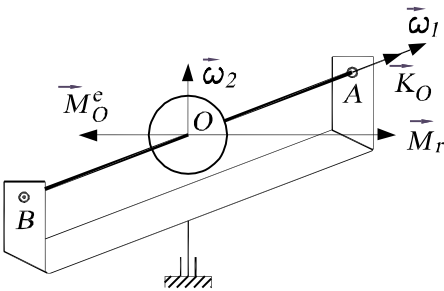


Рисунок 26.6

Розглянемо тепер випадок, коли рух гіроскопа заданий, а потрібно визначити сили, що діють на гіроскоп. Будемо вважати, що гіроскоп обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$  навколо своєї осі симетрії, а ця вісь обертається з кутовою швидкістю прецесії  $\vec{\omega}_2$  (Рис. 26.6).

Момент зовнішніх сил  $\vec{M}_O^e$ , під дією яких вісь гіроскопа

здійснює прецесію з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$ , визначають за формулою (26.10).

Цей момент зумовлений дією підшипників у точках  $A$  і  $B$  на вісь гіроскопа при обертанні рамки гіроскопа з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$ . За принципом рівності дії та протидії вісь гіроскопа діє на рамку в підшипниках  $A$  і  $B$  силами, що утворюють так званий гіроскопічний момент  $\vec{M}_r$

$$\vec{M}_r = -\vec{M}_O^e = I_z (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2),$$

або

$$M_r = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta,$$

де  $\theta$  – кут між векторами кутових швидкостей  $\vec{\omega}_2$  і  $\vec{\omega}_1$ .

Як видно на рис. 26.6, гіроскопічний момент діє так, ніби намагається повернути вектор  $\vec{\omega}_1$  до збігання з вектором  $\vec{\omega}_2$ , що дає можливість сформулювати таке правило: **при наданні осі гіроскопа вимушеної прецесії вісь гіроскопа намагається стати паралельною осі вимушеної прецесії так, щоб напрямок вектора  $\vec{\omega}_1$  збігався з напрямком вектора  $\vec{\omega}_2$ , повертаючись на кут менший за  $180^\circ$ . Це правило називають правилом Жуковського.**

**Задача 26.1.** Турбіна корабля (Рис. 26.7) обертається на горизонтальній осі з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_1$ . Визначити силу гіроскопічного тиску на кожний підшипник, коли корабель буде здійснювати поворот з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$ .

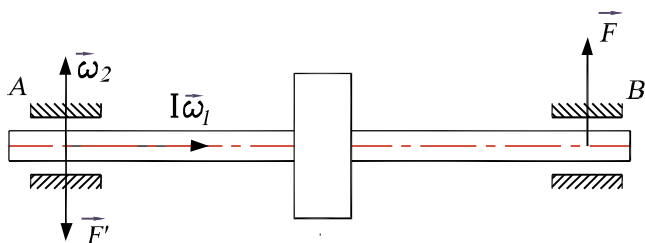


Рисунок 26.7

### Розв'язок

Якщо корабель буде здійснювати поворот з кутовою швид-

кістю  $\vec{\omega}_2$ , то з ним буде повертатися і вал турбіни. Гіроскопічний момент, що при цьому виникає, є моментом пари сил  $\vec{F}$  і  $\vec{F}'$ , прикладених до підшипників. Як видно з рис. 26.7 та згідно з правилом Жуковського

$$M_r = F \cdot AB = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta.$$

При  $\theta = 90^\circ$  знаходимо силу гіроскопічного тиску на кожний підшипник

$$F = \frac{I_z \omega_1 \omega_2}{AB}.$$

Для великих значень кінетичного моменту турбіни  $I\omega_1$  ця сила достатньо велика, тому її слід урахувувати у відповідних інженерних розрахунках.

### Контрольні запитання

1. Що називають гіроскопом?
2. Наведіть приклади гіроскопів.
3. Сформулюйте теорему Резаля.
4. Що таке астатичний гіроскоп?
5. Що таке прецесія осі гіроскопа та як визначити кут прецесії?
6. Запишіть формулу для визначення гіроскопічного моменту та сформулюйте правило Жуковського.
7. Основне припущення елементарної теорії гіроскопа.

## Глава 27. Принцип можливих переміщень

Загальні теореми динаміки та одержані з них наслідки дають наочні засоби дослідження руху матеріальної системи. Користуючись ними, можна відразу скласти диференціальні рівняння, розв'язок яких визначає рух системи та отримати відповіді на поставлені запитання.

Однак застосування загальних теорем пов'язане з відомими труднощами. Передусім, практично неможливо строго класифікувати задачі та вказати, в якому випадку яка теорема швидше дозволить розв'язати задачу. Окрім того, при складанні диференціальних рівнянь руху матеріальної системи за допомогою загальних теорем динаміки часто доводиться розчленовувати систему, збільшувати число рівнянь і вводити невідомі величини (реакції в'язей), визначення яких не завжди потрібне за умовою задачі.

Аналітична механіка дає загальні методи, з допомогою яких можна скласти диференціальні рівняння руху, не вводячи реакцій ідеальних в'язей. Методи аналітичної механіки є корисними не тільки в теоретичних дослідженнях, але і в практичних інженерних розрахунках.

### 27.1. В'язі та їхня класифікація

Систему матеріальних точок називають **вільною**, якщо положення та швидкості окремих її точок можуть приймати довільні значення. Систему називають **невільною**, якщо матеріальні точки в системі внаслідок певних обмежень не можуть займати у просторі довільні положення та мати які завгодно швидкості. Умови, якими формулюють обмеження на положення або рух точок системи в просторі, називають **в'язями**. В аналітичній механіці необхідно більш докладно розглядати в'язі, що накладені на точки механічної системи.

Математично в'язі можуть бути виражені рівняннями, в які входять час, координати точок системи та їхні похідні за часом різних порядків. Для однієї точки рівняння в'язі в загальному випадку можна записати у формі

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t) = 0. \quad (27.1)$$

Надалі будемо розглядати в'язі, у рівняння яких входять похідні від координат за часом не вищі від першого порядку. Для механічної системи, яку складають  $n$  точок,  $s$  рівнянь в'язей подають такою системою рівнянь:

$$f_i(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (27.2)$$

В'язі, які описують рівняннями, називають **утримуючими (двобічними)**.

Прикладом утримуючої в'язі є з'єднання двох матеріальних точок жорстким невагомим і нерозтяжним стержнем довжиною  $\ell$  (Рис. 27.1). Рівняння такої в'язі

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \ell^2,$$

де  $x_1, y_1, \dots, z_2$  – координати точок  $A_1$  і  $A_2$ .

Деколи в механіці розглядають ще **неутримувальні (однобічні)** в'язі. Умови обмеження для неутримувальних в'язей мають вигляд нерівностей. Прикладом такої в'язі є з'єднання двох матеріальних точок абсолютно гнучкою нерозтяжною та неваговою ниткою довжиною  $\ell$ . Залежність для опису такої в'язі має вигляд

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \leq \ell^2.$$

Коли нитка натягнута, то в наведеній залежності має місце знак рівності, коли нитка не натягнута – знак нерівності. У такому разі рух системи можна розділити на частини так, що на одних в'язь буде утримуючою (знак рівності), а на інших в'язь мо-

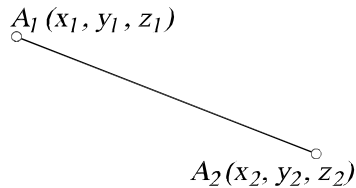


Рисунок 27.1

жна розглядати відсутньою (знак нерівності). Далі будемо розглядати лише випадки утримуючих в'язей.

**В'язі називають голономними (геометричними), якщо їхні рівняння не містять похідних від координат за часом або диференціалів координат.**

**В'язі називають неголономними (кінематичними), якщо їхні рівняння містять похідні від координат за часом або диференціали координат і якщо неможливо за допомогою інтегрування представити ці рівняння як залежності між координатами та часом.**

**Рівняння голономної в'язі для системи має вигляд**

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (27.3)$$

З голономних в'язей (геометричних) диференціюванням можна отримати в'язі, рівняння яких містять похідні (так звані **кінематичні в'язі**).

З неголономних в'язей голономні, як це видно з означення, отримати неможливо. Важливий клас механічних систем з неголономними в'язями інтенсивно досліджують у наш час. Надалі будемо розглядати системи, на які накладені голономні в'язі.

Під час руху механічної системи координати точок і їхні похідні за часом, які входять у рівняння в'язей, можуть залежати від часу. Крім того, в рівняння в'язей окрім координат і їхніх похідних час може входити явно,.

**В'язі, в рівняння яких час явно не входить, називають стаціонарними або склерономними. В'язі, в рівняння яких час входить явно, називають нестаціонарними або реономними.**

**Рівняння стаціонарної в'язі для системи має вигляд**

$$f(x_k, y_k, z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (27.4)$$

Отже, в першому прикладі в'язь є утримувальною, голономною та стаціонарною.

## 27.2. Можливі переміщення. Ступінь вільності

Для формулювання принципу можливих переміщень, який визначає умови рівноваги механічної системи, слід розглянути поняття можливого, або віртуального, переміщення.

Для однієї точки можливим переміщенням називають нескінченно мале (елементарне) **уявне** переміщення, яке допускають у даний момент часу накладені на точку в'язі.

Для можливого переміщення не потрібен час на його виконання. Це уявне переміщення, яке могла б здійснити точка при накладених на неї в'язях у даний фіксований момент часу. На відміну від елементарного справжнього переміщення  $d\vec{r}$ , яке здійснює точка за час  $dt$  під дією прикладених сил при заданих початкових умовах і накладених в'язях, можливе переміщення  $\delta\vec{r}$  визначається тільки в'язями в даний момент часу. Проекції можливого переміщення  $\delta\vec{r}$  на осі координат, або варіації координат, позначають  $\delta x, \delta y, \delta z$ , а проекції елементарного дійсного переміщення на осі координат, або диференціали координат, при зміні часу  $dt$  позначають  $dx, dy, dz$ . Можливе переміщення  $\delta\vec{r}$ , як і дійсне  $d\vec{r}$ , є вектором і його зображають направленим прямолінійним відрізком. Очевидно, що елементарне дійсне переміщення точки належить до числа можливих, якщо в'язь стаціонарна (і дійсне переміщення не містить переміщення разом зі в'яззю).

**Можливе переміщення точки  $\delta\vec{r}$  вважають ізохронною варіацією радіуса–вектора**, тобто його диференціалом, але при фіксованому часі, коли змінюються тільки координати точки ( $\delta x, \delta y, \delta z$  – **ізохронні варіації координат точки, що допускаються в'язями**). Дійсне переміщення  $d\vec{r}$  є повним диференціалом радіуса–вектора, що визначається по зміні координат точки залежно від зміни часу;  $dx, dy, dz$  – повні диференціали ко-

ординат точки при зміні незалежного змінного часу  $t$  на величину  $dt$ .

**Можливим переміщенням системи називають будь-яку сукупність можливих переміщень точок системи (3n).**

У загальному випадку система може мати нескінченно багато можливих переміщень. Унаслідок наявності в'язей  $s$ , накладених на систему, не всі можливі переміщення є незалежними.

Число **незалежних можливих переміщень** називають **числом степенів вільності** системи ( $H=3n-s$ ).

Вільна точка має три степені вільності. У цьому разі можливі переміщення (варіації)  $\delta x, \delta y, \delta z$  є незалежними. Якщо точка рухається по поверхні  $f(x, y, z, t) = 0$ , то  $\delta x, \delta y, \delta z$  зв'язані співвідношенням

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0, \quad (27.5)$$

яке одержують розкладом у степеневий ряд функції

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0,$$

нехтуючи доданками другого і більш високого порядків малості відносно  $\delta x, \delta y, \delta z$  і враховуючи рівність  $f(x, y, z) = 0$ .

Незалежних варіацій координат, а отже, і степенів вільності, буде дві. Час при цьому не варіюється, він фіксований.

### **27.3. Елементарна робота сили на можливому переміщенні. Ідеальні в'язі**

Елементарну роботу сили на можливому переміщенні обчислюють за відомими формулами, наприклад,

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$



Для механічної системи з  $n$  точок, до яких прикладені сили, елементарну роботу цих сил на будь-якому можливому переміщенні системи відповідно виразимо так:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \quad (27.6)$$

Елементарна робота сил у цьому разі залежить від вибору можливого переміщення системи.

Позначимо сили реакцій в'язей для точок системи  $\vec{R}_k$ . **Голономні та неголономні в'язі, елементарна робота сил реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю, називають ідеальними або в'язями без тертя. Отже для ідеальних в'язей виконується умова**

$$\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (27.7)$$

Важливо відзначити, що ця умова повинна виконуватися для всіх можливих переміщень системи. Наведемо приклади ідеальних в'язей.

1. **У абсолютно твердому тілі** точки зв'язані ідеальними в'язями. Силами реакцій в'язей у цьому випадку є внутрішні сили, для яких сума елементарних робіт цих сил на будь-яких елементарних переміщеннях точок тіла дорівнює нулю.

2. **Абсолютно гладка поверхня або абсолютно гладка лінія є ідеальною в'яззю** для точки. Можливі переміщення таких в'язей напрямлені по дотичних до поверхонь або ліній, а реакції – по нормалях до них, тобто  $\vec{R}_k \perp \delta \vec{r}_k$  і  $\vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = R_k \delta r_k \cos \angle(\vec{R}_k, \delta \vec{r}_k) = 0$ .

3. **Гнучкі нерозтяжні в'язі** типу ниток, канатів, тросів тощо, що з'єднують точки системи, є ідеальними в'язями. У кожному перерізі такої в'язі реакції однакові за модулем і протилежні за напрямом, а переміщення однакові.

4. **Закріплені точки системи** є ідеальними в'язями, бо їхні можливі переміщення дорівнюють нулю.

5. **Шорстка поверхня для котків**, що котяться без ковзання при відсутності тертя кочення і з **однією точкою дотику**, є ідеальною в'яззю, бо можливі переміщення в точці дотику дорівнюють нулю.

#### 27.4. Принцип можливих переміщень

Розглянемо умову рівноваги механічної системи. Передусім необхідно уточнити слово "рівновага". Якщо сили, прикладені до вільної матеріальної точки, зрівноважені, то це означає тільки те, що сума сил дорівнює нулю, сама ж точка може виконувати рівномірний та прямолінійний рух. Для того, щоб точка перебувала в спокої, умови, що накладають на сили, необхідно доповнити вимогою рівності нулю початкової швидкості точки.

Принцип можливих переміщень, або принцип Лагранжа, містить необхідні та достатні умови рівноваги деяких механічних систем. Принцип можливих переміщень формулюється так: **для рівноваги механічної системи, підпорядкованої ідеальним стаціонарним і утримуючим в'язям, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт всіх активних сил, прикладених до точок системи, дорівнювала нулю на будь-якому можливому переміщенні системи, якщо швидкості точок системи в даний момент часу дорівнюють нулю.** Тобто

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (27.8)$$

**Необхідність.** Доведемо, що якщо система перебуває в рівновазі, то активні сили задовольняють умову (27.8). Справді, якщо система перебуває в рівновазі, то для кожної її точки виконується умова:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

де  $\vec{R}_k$  – сила реакції в'язі. Якщо помножимо скалярно обидва доданки рівності на можливе переміщення  $\delta\vec{r}_k$  точки  $M_k$  і додамо одержані рівності для всіх точок системи, то дістанемо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0.$$

Згідно з умовою ідеальності в'язей  $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0$  і для активних сил отримуємо умову (27.8).

**Достатність** умови (27.8) рівноваги системи доводять методом від супротивного. Припускаємо, що умова (27.8) і всі інші умови виконуються, а система вийшла з рівноваги. Нехай при цьому принаймні для однієї точки системи не буде виконуватися умова рівноваги сил, тобто  $\vec{F}_k + \vec{R}_k \neq 0$ .

За умовою теореми всі в'язі стаціонарні, тому дійсне переміщення точки за час  $dt$  буде збігатися з одним із можливих переміщень  $\delta\vec{r}_k$ .

На підставі теореми про зміну кінетичної енергії сума робіт усіх активних сил і реакцій в'язей на цьому переміщенні буде додатна, бо при переході зі стану спокою у рух система отримає додатній приріст кінетичної енергії. Отже,

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \cdot \delta\vec{r}_k > 0,$$

або 
$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k > 0.$$

За умовою теореми в'язі ідеальні, тому друга сума дорівнює нулю,  $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0$ . Отже

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0.$$

Несумісність цієї нерівності з умовою (27.8) і доводить достатність принципу можливих переміщень.

**Примітка.** Відзначимо, що в усіх міркуваннях ми уживали термін «можливі переміщення». У літературі часто зустрічаємо інший термін – «віртуальні переміщення» – від латинського слова *virtualis* – можливий. Якщо користуватися терміном «можливе переміщення», то для нестационарних в'язей ми повинні сказати: «дійсне елементарне переміщення не є можливим» (бо дійсне елементарне переміщення не збігається ні з одним з можливих переміщень). У цьому випадку краще користуватися терміном «віртуальне переміщення».

### Контрольні запитання

1. Наведіть класифікацію в'язей.
2. Що називають можливим переміщенням?
3. Чим відрізняються дійсні та можливі переміщення і що між ними спільного?
4. Які в'язі називають ідеальними?
5. Наведіть приклади ідеальних в'язей.
6. Сформулюйте принцип можливих переміщень.
7. Для яких в'язей справедливий принцип можливих переміщень?

## Глава 28. Загальне рівняння динаміки. Рівняння Лагранжа другого роду

### 28.1. Узагальнені координати системи

Нехай систему складають  $n$  точок. Отже її положення в просторі в кожний момент часу визначається  $3n$  координатами точок системи, наприклад, декартовими координатами  $x_k, y_k, z_k$ . Припустимо, що на систему накладені голономні в'язі, рівняння яких у загальному випадку можуть містити також похідні від координат точок. Але після інтегрування в'язі звели до геометричних і записали у вигляді

$$f_i(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (28.1)$$

Розглядаємо тільки утримувальні в'язі. Тоді  $3n$  координат зв'язані  $s$  рівняннями і незалежних координат буде  $H = 3n - s$ .

Будь-які  $H$  декартових координат можна задати незалежно одна від одної. Інші координати визначають з рівнянь в'язей. Замість  $H$  незалежних декартових координат можна вибрати будь-які інші незалежні параметри  $q_1, q_2, \dots, q_H$ , що залежать від усіх або частини декартових координат точок системи.

**Незалежні параметри, які визначають положення системи в просторі у кожний момент її руху, називають узагальненими координатами системи.**

У загальному випадку вони можуть залежати від усіх декартових координат точок системи, тобто

$$q_i = q_i(x_k, y_k, z_k), \quad i = 1, 2, \dots, H, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (28.2)$$

Задання узагальнених координат повністю визначає положення точок системи відносно вибраної системи відліку.

У вільної точки три узагальнені координати. Якщо точка рухається по заданій поверхні, то узагальнених координат буде тільки дві й так далі. Використовуючи рівняння в'язей (28.1) і вирази узагальнених координат через декартові (28.2), можна виразити декартові координати через узагальнені, тобто

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_H, t);$$

$$y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_H, t); z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_H, t).$$

Відповідно для радіуса-вектора кожної точки системи  $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$  отримаємо

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_H, t). \quad (28.3)$$

У разі стаціонарних в'язей час явно не входить у рівняння в'язей. Тому в залежності (28.3) час увійде тільки неявно, через узагальнені координати, якщо система рухається. Для голономних систем вектор можливого переміщення точки  $\delta \vec{r}_k$  відповідно до (28.3) можна виразити у формі

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 +$$

$$+ \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_H} \delta q_H = \sum_{i=1}^H \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (28.4)$$

**Система, що має  $H$  незалежних узагальнених координат, характеризується також  $H$  незалежними можливими переміщеннями, або варіаціями  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_H$ , якщо в'язі голономні.** Тобто для голономних систем число незалежних можливих переміщень збігається з числом незалежних узагальнених координат.

**Отже, число ступенів вільності голономної системи дорівнює числу незалежних узагальнених координат цієї системи, тобто дорівнює  $H = 3n - s$ .**

Розглянемо як приклад кривошипно-шатунний механізм (Рис. 28.1). Його положення на площині цілком визначається заданням положення трьох його точок  $O$ ,  $A$  і  $B$  з координатами  $(0,0)$ ,  $(x_A, y_A)$  і  $(x_B, 0)$ .

Координат, які не дорівнюють нулю, тільки три, тобто  $3n = 3$ . Можна скласти два рівняння в'язей, урахувавши, що  $OA = r$ ,  $AB = \ell$ . Маємо

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2; (x_B - x_A)^2 + y_A^2 = \ell^2. \quad (28.5)$$

Число ступенів вільності

$$H = 3n - s = 3 - 2 = 1.$$

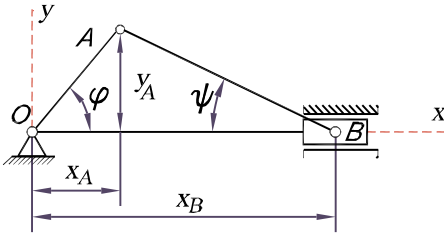


Рисунок 28.1

З трьох координат, які не дорівнюють нулю, тільки одну можна задати незалежно. Дві інші виражають через неї як розв'язок рівнянь в'язей.

За незалежну координату можна вибрати будь-яку з трьох координат  $x_A, y_A, x_B$

або будь-яку комбінацію цих координат. Зручно за незалежну узагальнену координату вибрати кут  $\varphi$ , тобто

$$q = \varphi = \arctg \frac{y_A}{x_A}. \quad (28.6)$$

З рівнянь (28.5) і (28.6) координати  $x_A, y_A, x_B$  можна виразити через  $\varphi$ . Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь відносно координат. Проте зручно, не розв'язуючи системи рівнянь, виразити координати через кут  $\varphi$  за допомогою рис. 28.1. Отримаємо

$$x_A = r \cos \varphi; \quad y_A = r \sin \varphi; \quad x_B = r \cos \varphi + \ell \cos \psi.$$

Але  $y_A = r \sin \varphi = \ell \sin \psi; \quad \sin \psi = \frac{r}{\ell} \sin \varphi;$

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\ell^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

З урахуванням цього вирази для координат набувають вигляду

$$x_A = r \cos \varphi; \quad y_A = r \sin \varphi; \quad x_B = r \cos \varphi + \sqrt{\ell^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ці значення декартових координат задовільняють рівняння (28.5) і (28.6).

## 28.2. Узагальнені сили.

### Визначення узагальнених сил

Сума елементарних робіт сил, які діють на точки системи, на можливому її переміщенні дорівнює:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (28.7)$$

Нехай голономна система має  $H$  степенів вільності. Тоді її положення в просторі визначається  $H$  узагальненими координатами  $q_1, q_2, \dots, q_H$ . Відповідно до (28.4) маємо

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^H \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (28.8)$$

Підставивши (28.8) у (28.7) і змінивши порядок додавання за індексами  $k$  та  $i$ , одержимо

$$\delta A = \sum_{i=1}^H \left( \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^H Q_i \delta q_i, \quad (28.9)$$

де скалярну величину  $Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$  називають

**узагальненою силою**, віднесеною до узагальненої координати  $q_i$ . Використовуючи відомий вираз для скалярного добутку двох векторів, узагальнену силу можна також подати у вигляді

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \quad (28.10)$$



де  $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$  – проекції сили на осі координат;  $x_k, y_k, z_k$  – координати точки прикладання сили.

### Розмірність узагальненої сили

Розмірність узагальненої сили відповідно до (28.9) залежить від розмірності  $\delta q_i$ , яка сумісна з розмірністю  $q_i$ , так:

$$[Q_i] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_i]} = \frac{[A]}{[q_i]}. \quad (28.11)$$

Тобто розмірність узагальненої сили дорівнює розмірності роботи сили, поділеної на розмірність узагальненої координати, до якої віднесена узагальнена сила.

### Обчислення узагальнених сил

1. Узагальнену силу можна обчислити за формулою (28.10)

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

2. Узагальнену силу можна обчислити як коефіцієнт при відповідній варіації узагальненої координати у виразі для елементарної роботи (28.9)

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^H Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H. \quad (28.12)$$

3. Найбільш доцільним є спосіб обчислення узагальнених сил, що впливає з (28.10), коли системі надати таке можливе переміщення, при якому змінюється тільки одна координата, а інші залишаються незмінними. Так, якщо  $\delta q_1 \neq 0$ , а  $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_H = 0$ , то з (28.10) маємо

$$Q_1 = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k \right)_{q_1}}{\delta q_1}. \quad (28.13)$$

Індекс  $q_1$  вказує на те, що суму елементарних робіт обчислюємо на можливому переміщенні, при якому змінюється тільки координата  $q_1$ .

4. Для потенціальних сил за їх визначенням

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}, \quad (28.14)$$

$$\text{де} \quad U = U(x_k, y_k, z_k) = U(q_1, q_2, \dots, q_H) \quad (28.15)$$

силова функція, яка залежить від координат точок системи, а через них і від узагальнених координат.

Для узагальненої сили, згідно з її визначенням, з урахуванням (28.14) і (28.15) маємо

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{k=1}^n \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Таким чином, у випадку існування силової функції

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (28.16)$$

тому що потенціальна енергія системи зв'язана з силовою функцією співвідношенням

$$\Pi = -U + \text{const}.$$

Отже, узагальнена сила дорівнює частинній похідній за відповідною координатою від силової функції.

### 28.3. Умови рівноваги механічної системи

Умови рівноваги системи виводять з принципу можливих переміщень. Вони можуть застосовуватися до систем, для яких

цей принцип є справедливим. Згідно з принципом можливих переміщень, умова

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

є необхідною й достатньою для рівноваги системи. Але відповідно до (28.12)

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H.$$

Отже, необхідною й достатньою умовою рівноваги механічної системи є рівність

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H = 0. \quad (28.17)$$

Унаслідок того, що узагальнені координати незалежні, їхні варіації  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_H$  є також незалежними довільними нескінченно малими величинами. Можна прийняти варіацію  $\delta q_1 \neq 0$ , а всі інші  $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_H = 0$ . Тоді з (28.17) отримаємо  $Q_1 = 0$ . Аналогічно, прийнявши  $\delta q_2 \neq 0$ , а  $\delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_H = 0$ , будемо мати  $Q_2 = 0$  і так далі.

Таким чином, з (28.17) одержуємо такі умови рівноваги системи:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_H = 0. \quad (28.18)$$

**Отже, для рівноваги механічної системи з голономними стаціонарними ідеальними утримувальними в'язям, у момент, коли швидкості всіх точок системи дорівнюють нулю, необхідно й достатньо, щоб усі узагальнені сили дорівнювали нулю.**

У статиці для рівноваги вільного твердого тіла, що має шість степенів вільності, було одержано шість умов рівноваги для прикладених до тіла сил. Ці умови можна отримати також, порівнявши до нуля кожен з шести узагальнених сил. Для цього слід вибрати за узагальнені координати декартові координати

$x, y, z$  будь-якої точки тіла та кути повороту тіла навколо осей координат, що проходять через цю точку. Узагальнені сили, віднесені до координат  $x, y, z$ , перетворюються відповідно у суми проекцій прикладених сил на ці осі, а узагальнені сили, віднесені до кутів повороту навколо осей координат, – у суми моментів сил відносно цих осей.

Умови рівноваги (28.18) для системи, що перебуває під дією потенціальних сил, разом з (28.16) дадуть такі умови для силової функції:

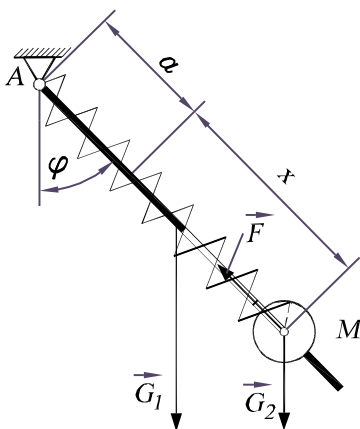
$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad Q_H = \frac{\partial U}{\partial q_H} = 0 \quad (28.19)$$

або 
$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \quad Q_H = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_H} = 0,$$

тобто всі частинні похідні від силової функції за узагальненими координатами дорівнюють нулю. Це є необхідною умовою існування екстремума силової функції. Отже, у разі рівноваги механічної системи, яка перебуває під

дією потенціальних сил, силова функція та потенціальна енергія можуть досягати екстремума.

**Задача 28.1.** Однорідний стержень вагою  $\vec{G}_1$  має довжину  $\ell$  і може обертатися навколо осі  $A$  у вертикальній площині. Розміщена на ньому кулька має вагу  $\vec{G}_2$  (Рис. 28.2). Довжина пружини  $AM$  дорівнює в ненапруженому стані  $a$ , а її жорсткість –  $c$ .



**Рисунок 28.2**

Визначити умови рівноваги системи.

### Розв'язок

Система має два степені вільності: переміщення кульки вздовж стержня та поворот стержня навколо точки  $A$ . Припустимо, що система перебуває в одному з можливих положень.

При цьому кут відхилення стержня від вертикального положення дорівнює  $\varphi$ , а пружина розтягнута на величину  $x^* = x + x_{\text{ст}}$ , де  $x_{\text{ст}}$  – деформація пружини у стані рівноваги системи.

За узагальнені координати виберемо  $q_1 = \varphi$  та  $q_2 = x$ . Складемо вираз для потенціальної енергії системи:

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} + \left[ \frac{\ell}{2} G_1 + (x + x_{\text{ст}} + a) \cdot G_2 \right] \cdot [1 - \cos \varphi].$$

Умови рівноваги системи мають вигляд:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -\left[ \frac{\ell}{2} G_1 + (x + x_{\text{ст}} + a) G_2 \right] \sin \varphi = 0, \quad (28.20)$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -cx - G_2 [1 - \cos \varphi] = 0. \quad (28.21)$$

З виразу (28.20) випливає, що система перебуває у рівновазі при  $\varphi = 0$ . Тоді з (28.21) отримаємо  $x = x^* - x_{\text{ст}} = 0$ . Отже, в положенні рівноваги  $x^* = x_{\text{ст}}$ . З умови рівноваги кульки при  $\varphi = 0$  маємо:  $x_{\text{ст}} = \frac{G_2}{c}$ .

## 28.4. Загальне рівняння динаміки

Відповідно до принципу Д'Аламбера для будь-якої механічної системи активні сили, сили реакцій в'язей разом з силами інерції задовільняють умову рівноваги сил для кожної точки системи, тобто

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (28.22)$$

де  $\vec{F}_k$  – активна сила,  $\vec{R}_k$  – сила реакції в'язі,  $\vec{F}_k^{\text{ін}}$  – сила інерції точки. Помноживши скалярно кожну з цих сил на можливе переміщення точки  $\delta\vec{r}_k$  і додавши рівняння для всіх точок системи, одержимо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \quad (28.23)$$

Це і є загальне рівняння динаміки для системи з будь-якими в'язями. Для системи з ідеальними в'язями, для яких другий доданок у (28.23) дорівнює нулю, будемо мати одну з форм загального рівняння динаміки:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}}) \delta\vec{r}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{ін}} = 0; \quad (28.24)$$

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \delta\vec{r}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n (F_k - m_k \ddot{r}_k) \delta\vec{r}_k = 0,$$

в яких силу інерції через прискорення  $\vec{a}_k$  відносно інерціальної системи координат виражають у вигляді

$$\vec{F}_k^{\text{ін}} = -m_k \vec{a}_k = -m_k \ddot{\vec{r}}_k,$$

де  $\vec{r}_k$  – радіус-вектор точки.

Таким чином, відповідно до загального рівняння динаміки: у будь-який момент руху системи з ідеальними в'язями сума елементарних робіт усіх активних сил та сил

**інерції точок системи дорівнює нулю на будь-якому можливому переміщенні системи (Принцип Д'Аламбера-Лагранжа).**

Розкриваючи скалярний добуток векторів у (28.24), дістанемо вираз загального рівняння динаміки в аналітичній формі:

$$\sum_{k=1}^n [(F_{kx} + F_{kx}^{\text{ін}}) \delta x_k + (F_{ky} + F_{ky}^{\text{ін}}) \delta y_k + (F_{kz} + F_{kz}^{\text{ін}}) \delta z_k] = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^n [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k] = 0. \quad (28.25)$$

Для використання загального рівняння динаміки необхідно вміти обчислювати елементарну роботу сил інерції системи на можливих переміщеннях.

#### **Елементарна робота сил інерції під час поступального руху**

Сили інерції під час поступального руху зводять до рівнодійної  $\vec{R}^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C = -M\vec{a}$ . Для суми елементарних робіт сил інерції на поступальному можливому переміщенні отримаємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \delta \vec{r}_k = \vec{R}^{\text{ін}} \delta \vec{r}_C = \vec{R}^{\text{ін}} \delta \vec{r} = -M\vec{a} \delta \vec{r},$$

де  $\delta \vec{r}_C = \delta \vec{r}$  – можливе переміщення центра мас і будь-якої точки тіла, бо поступальне можливе переміщення для всіх точок тіла однакове, однакові також прискорення, тобто  $\vec{a}_C = \vec{a}$ .

#### **Елементарна робота сил інерції під час обертального руху**

У разі обертання тіла навколо нерухомої осі можливим переміщенням тіла є поворот на елементарний кут  $\delta\varphi$  навколо цієї осі. У разі зведення до точки  $O$  на осі обертання сили

інерції зводять до головного вектора  $\vec{R}^{\text{ін}}$  і головного моменту  $\vec{M}_O^{\text{ін}}$ .

Головний вектор сил інерції прикладений до нерухокої точки і його елементарна робота на можливому переміщенні дорівнює нулю. Щодо головного моменту сил інерції, то роботу виконує тільки його проекція на вісь обертання  $M_z^{\text{ін}} = -I_z \varepsilon$ .

Таким чином, для суми робіт сил інерції на можливому переміщенні  $\delta\varphi$  маємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \cdot \delta\vec{r}_k = M_z^{\text{ін}} \delta\varphi = -I_z \varepsilon \delta\varphi,$$

якщо поворот на кут  $\delta\varphi$  надати в напрямку дугової стрілки кутового прискорення.

### Елементарна робота сил інерції під час плоского руху

Під час плоского руху можливе переміщення складається з поступального переміщення  $\delta\vec{r}_C$  разом з полюсом, за який виберемо центр мас, і повороту на елементарний кут  $\delta\varphi$  навколо осі  $Cz$ .

Суму елементарних робіт сил інерції на плоскому можливому переміщенні зводять до елементарної роботи головного вектора сил інерції  $\vec{R}^{\text{ін}} = -M\vec{a}_C$  на можливому переміщенні центра мас й елементарної роботи головного момента сил інерції на елементарному повороті  $\delta\varphi$  навколо осі  $Cz$ , що проходить через центр мас.

При цьому роботу може виконувати тільки проекція головного момента сил інерції на вісь  $Cz$ , тобто  $M_{Cz}^{\text{ін}} = -I_{Cz} \varepsilon$ . Таким чином, у цьому випадку маємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \vec{R}^{\text{ін}} \delta\vec{r}_C + M_{Cz}^{\text{ін}} \delta\varphi = -M\vec{a}_C \delta\vec{r}_C - I_{Cz} \varepsilon \delta\varphi,$$



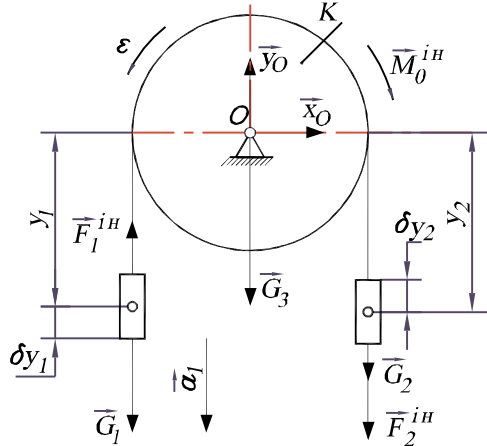
якщо поворот на кут  $\delta\varphi$  направити по дуговій стрілці для  $\varepsilon$ .

**Задача 28.2.** Два тіла масами  $m_1$  і  $m_2$  зв'язані між собою абсолютно гнучкою та нерозтяжною ниткою, перекинutoю через блок  $K$  масою  $m_3$ . (Рис. 28.3).

Уважаючи блок однорідним диском і нехтуючи масою нитки та тертям, визначити прискорення руху вантажів ( $m_1 > m_2$ ).

**Розв'язок**

Припустимо, що вантаж 1 має прискорення  $\vec{a}_1$ , напрямлене вниз. Оскільки нитка нерозтяжна, то рівняння в'язі має вигляд



**Рисунок 28.3**

$$y_1 + y_2 = \ell,$$

звідси  $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$ , тобто  $a_1 = -a_2$ , і  $\delta y_1 = -\delta y_2$ .

Елементарний кут повороту  $\delta\varphi = \frac{\delta y_1}{R}$ . Визначимо величини сил інерції:

$$F_1^{\text{ін}} = m_1 a_1; F_2^{\text{ін}} = m_2 a_2 = m_2 a_1; M_O^{\text{ін}} = I_{Oz} \varepsilon = \frac{m_3 R^2}{2} \frac{a_1}{R}, \left( \varepsilon = \frac{a_1}{R} \right)$$

Складемо загальне рівняння динаміки, задавши можливе переміщення  $\delta y_1$  вантажу 1:

$$G_1 \delta y_1 - F_1^{\text{ін}} \delta y_1 - M_O^{\text{ін}} \delta\varphi - G_2 \delta y_1 - F_2^{\text{ін}} \delta y_1 = 0.$$

Елементарна робота сил  $\vec{G}_3, \vec{X}_O, \vec{Y}_O$  дорівнює нулю, оскільки  $\delta s_O = 0$ .

Підставляючи значення сил інерції та переміщень, одержимо

$$m_1 g \delta y_1 - m_1 a_1 \delta y_1 - \frac{m_3 R^2}{2} \frac{a_1}{R} \frac{\delta y_1}{R} - m_2 g \delta y_1 - m_2 a_1 \delta y_1 = 0,$$

звідси прискорення вантажів

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 0,5m_3}.$$

## 28.5. Рівняння Лагранжа другого роду

Щоб знайти рівняння руху механічної системи з геометричними утримувальними в'язями в узагальнених координатах, використаємо загальне рівняння динаміки у вигляді:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{ін}} = 0. \quad (28.26)$$

З метою узагальнення не будемо вважати, що всі накладені на систему в'язі є ідеальними. Тому в першу суму можуть входити як робота активних сил, так і, наприклад, робота сил тертя. Нехай система має  $H$  степенів вільності та її положення визначають узагальнені координати  $q_1, q_2, \dots, q_H$ .

Тоді за формулою (28.7)

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H. \quad (28.27)$$

Очевидно, що так само, як це було зроблено раніше для сил  $\vec{F}_k$ , можна перетворити до узагальнених координат елементарну роботу сил інерції. При цьому дістанемо

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{\text{ін}} = Q_1^{\text{ін}} \delta q_1 + Q_2^{\text{ін}} \delta q_2 + \dots + Q_H^{\text{ін}} \delta q_H = \sum_{i=1}^H \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (28.28)$$

де  $Q_1^{\text{ін}}, Q_2^{\text{ін}}, \dots, Q_H^{\text{ін}}$  – узагальнені сили інерції, що дорівнюють:

$$Q_i^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, H). \quad (28.29)$$

Підставляючи (28.27) і (28.28) у рівняння (28.26), отримаємо

$$(Q_1 + Q_1^{\text{ін}}) \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{\text{ін}}) \delta q_2 + \dots + (Q_H + Q_H^{\text{ін}}) \delta q_H = 0. \quad (28.30)$$

Оскільки всі  $\delta q_i$  між собою незалежні, то отримана рівність може виконуватися лише тоді, коли кожний з коефіцієнтів при  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_H$  окремо дорівнює нулю, тобто

$$Q_1 + Q_1^{\text{ін}} = 0, \quad Q_2 + Q_2^{\text{ін}} = 0, \quad \dots, \quad Q_H + Q_H^{\text{ін}} = 0. \quad (28.31)$$

Одержаними рівняннями можна безпосередньо користуватися при розв'язанні задач динаміки. Однак процес складання цих рівнянь значно спроститься, якщо виразити всі узагальнені сили інерції, що входять у ці рівняння, через кінетичну енергію системи.

Перетворимо спочатку величину  $Q_1^{\text{ін}}$ . Оскільки сила інерції будь-якої з точок системи  $\vec{F}_k^{\text{ін}} = -m_k \vec{a}_k = -m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}$ , то з формули (28.31) отримаємо

$$-Q_1^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}. \quad (28.32)$$

Щоб виразити  $Q_1^{\text{ін}}$  через кінетичну енергію системи, треба

перетворити праву частину рівності (28.30) так, щоб вона містила тільки швидкості  $\vec{v}_k$  точок системи. З цією метою зауважимо передусім, що

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right) - \vec{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right). \quad (28.33)$$

У справедливості рівності (28.33) легко переконатися, продиференціювавши добуток, що стоїть праворуч в дужках. Урахуємо далі, що

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k, \quad \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1,$$

де  $\dot{q}_1$  – узагальнена швидкість, що відповідає узагальненій координаті  $q_1$ .

Тоді для похідних від  $\vec{r}_k$ , що входять у (28.33), буде справедливим таке:

1. Частинна похідна від  $\vec{r}_k$  по  $q_1$  є границя відношення частинного приросту  $(\Delta \vec{r}_k)_1$  до приросту  $\Delta q_1$ . Звідси відповідно до правила Лопітала (позначаючи  $\partial \vec{r}_k$  просто як  $\Delta \vec{r}_k$ ) знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} &= \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_k}{\Delta q_1} = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}(\Delta \vec{r}_k)}{\frac{d}{dt}(\Delta q_1)} = \\ &= \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \left( \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right)}{\Delta \left( \frac{dq_1}{dt} \right)} = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_k}{\Delta \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_1}. \end{aligned} \quad (28.34)$$

2. Операції повного диференціювання по  $t$  і частинного диференціювання по  $q_1$  переставні, що дає

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_1}. \quad (28.35)$$

Користуючись співвідношеннями (28.34) і (28.35), запишемо рівність (28.33) так

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_k^2}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_k^2}{\partial q_1}.$$

Тоді вираз (28.32), якщо врахувати, що маса – величина стала, а сума похідних дорівнює похідній від суми, запишемо у такому вигляді

$$\begin{aligned} -Q_1^{\text{in}} &= \sum_{k=1}^n m_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_k^2}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_k^2}{\partial q_1} \right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_k \vec{v}_k^2}{\partial \dot{q}_1} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_k \vec{v}_k^2}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

де  $T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}$  – кінетична енергія системи.

Аналогічні вирази можна отримати для всіх інших узагальнених сил інерції. Тоді рівняння (28.31) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_H} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_H} &= Q_H.
\end{aligned}
\tag{28.36}$$

Рівняння (28.36) є диференціальними рівняннями руху системи в узагальнених координатах або рівняннями Лагранжа другого роду. Кількість цих рівнянь дорівнює числу степенів вільності системи.

Рівняння Лагранжа другого роду дають єдиний та достатньо простий метод розв'язання задач динаміки. Важлива перевага цих рівнянь полягає в тому, що їхній вигляд і число не залежать ні від кількості тіл, що входять в дану систему, ні від того, як ці тіла рухаються. Крім того, при ідеальних в'язях до правих частин рівнянь (28.36) входять узагальнені активні сили та ці рівняння дозволяють заздалегідь виключити з розгляду всі невідомі реакції в'язей.

Основна задача динаміки в узагальнених координатах полягає в тому, щоб, знаючи узагальнені сили та початкові умови, знайти закон руху системи у вигляді

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \dots, q_H = f_H(t),$$

тобто визначити узагальнені координати як функції часу. Оскільки кінетична енергія  $T$  залежить від узагальнених швидкостей  $\dot{q}_i$ , то при диференціюванні рівнянь (28.36) по  $t$  в лівих частинах цих рівнянь з'являться другі похідні по часу  $\ddot{q}_i$ . Отже, рівняння Лагранжа є звичайними диференціальними

рівняннями другого порядку відносно узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_H$ .

### Випадок потенціальних сил

Якщо всі сили, які діють на систему, потенціальні, то, використовуючи формули

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \dots, Q_H = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_H},$$

перше з рівнянь (28.36) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_1} = 0.$$

Остання рівність справедлива тому, що потенціальна енергія залежить тільки від координат  $q_1, q_2, \dots, q_H$ , а від узагальнених

швидкостей не залежить і  $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_1} = 0$ . Аналогічно перетворюються

всі інші рівняння системи (28.36). Введемо функцію

$$L = T - \Pi. \quad (28.37)$$

Функцію  $L$  від узагальнених координат і узагальнених швидкостей, що дорівнює різниці між кінетичною та потенціальною енергіями системи, називають **функцією Лагранжа або кінетичним потенціалом**. Тоді у випадку потенціальних сил рівняння Лагранжа набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_H} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_H} &= 0. \end{aligned} \quad (28.38)$$

З цього випливає, що стан механічної системи, на яку діють потенціальні сили, визначається заданням однієї тільки **функції Лагранжа**, тому що, знаючи цю функцію, можна скласти диференціальні рівняння руху системи.

**Задача 28.3.** На кінцях тонкого однорідного стержня  $AB$  з довжиною  $\ell$  і масою  $m$  на кінцях розміщені повзуни  $A$  і  $B$ , які ковзають під дією сили ваги стержня по напрямних  $Ox$  і  $Oy$  (Рис. 28.4).

Нехтуючи масою повзунів і силами тертя, скласти диференціальні рівняння руху стержня та визначити його кутове прискорення.

### Розв'язок

Стержень має один степінь вільності, тому його положення будемо визначати однією узагальненою координатою – кутом  $\varphi$ . На рис. 28.4

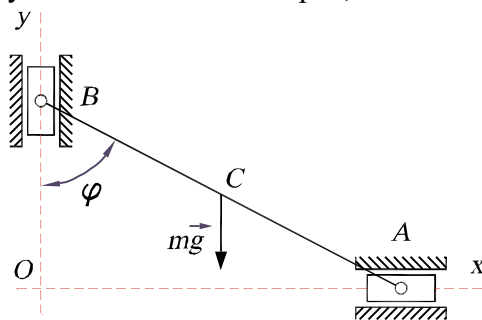


Рисунок 28.4

зображена тільки активна сила – сила ваги  $m\vec{g}$ . Реакції опор  $\vec{N}_A$  і  $\vec{N}_B$  показувати не слід, тому що вони не ввійдуть у рівняння Лагранжа, яке запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Кінетична енергія стержня

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\varphi}^2,$$



де  $m$  – маса стержня,  $v_C$  – швидкість його центра мас  $C$ ,  $I_{Cz} = \frac{m\ell^2}{12}$  – момент інерції стержня відносно осі  $Cz$ , що проходить через точку  $C$  перпендикулярно до площини руху.

Для обчислення швидкості точки  $C$  знайдемо її координати

$$x_C = \frac{1}{2}\ell \sin \varphi, \quad y_C = \frac{1}{2}\ell \cos \varphi.$$

Диференціюючи за часом, отримаємо

$$\dot{x}_C = \frac{1}{2}\ell \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_C = -\frac{1}{2}\ell \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Звідси 
$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \frac{1}{4}\ell^2 \dot{\varphi}^2.$$

Підставляючи значення  $I_C$  і  $v_C$  у вираз для  $T$ , дістанемо

$$T = \frac{1}{2}m \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{12} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2 \dot{\varphi}^2.$$

Для визначення узагальненої сили, знайдемо вираз потенціальної енергії системи, вважаючи, що у горизонтальному положенні стержня  $\Pi = 0$ :

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl \cos \varphi.$$

Узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті  $\varphi$ , і доданки, що входять у рівняння Лагранжа другого роду, будуть мати вигляд

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}mgl \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3}m\ell^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3}m\ell^2 \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння Лагранжа, отримаємо

$$\frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} m g \ell \sin \varphi ,$$

звідси 
$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2\ell} \sin \varphi .$$

Це рівняння і є диференціальним рівнянням руху стержня; воно також визначає кутове прискорення стержня  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$  .

### Контрольні запитання

1. Що називають узагальненими координатами системи?
2. Скільки узагальнених координат має вільна точка та вільне тіло?
3. Чому дорівнює число незалежних узагальнених координат голономної системи?
4. Записати вирази для узагальненої сили.
5. Сформулюйте необхідні й достатні умови рівноваги механічної системи з голономними стаціонарними ідеальними утримуючими в'язями.
6. Як визначити елементарну роботу сил інерції під час поступального, обертального та плоскопаралельного руху твердого тіла?
7. Що називають функцією Лагранжа?
8. Записати рівняння Лагранжа другого роду для механічної системи, на яку діють потенціальні сили.
9. Записати загальне рівняння динаміки для механічної системи з будь-якими в'язями та з ідеальними в'язями.

## Глава 29. Малі коливання механічної системи біля положення стійкої рівноваги

Коливання – одне з найбільш розповсюджених явищ у природі, фізиці та техніці. Коливання часто є причиною багатьох аварій та катастроф і шкідливо впливають на людину. Поряд з цим коливання використовують у багатьох технологічних операціях та галузях техніки і для їх вивчення використовують різноманітні математичні методи.

Ми розглянемо основні властивості малих коливань механічних систем з одним і двома степенями вільності на основі застосування рівнянь Лагранжа другого роду. Механічна система може здійснювати малі коливання тільки біля положення так званої стійкої рівноваги, означення якої розглянемо насамперед.

### 29.1. Положення рівноваги та його стійкість

Розглянемо механічну систему з ідеальними стаціонарними геометричними в'язями, положення та рух якої визначають незалежні узагальнені координати  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Для вивчення коливань необхідно насамперед визначити ті положення, в яких система перебуває в рівновазі.

Як відомо, в стані рівноваги всі узагальнені сили дорівнюють нулеві, тому для консервативної системи запишемо такі залежності

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_N} = 0, \quad (29.1)$$

де  $\Pi$  – потенціальна енергія системи.

Розв'язуючи рівняння (29.1) відносно узагальнених координат  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , знайдемо положення рівноваги механічної системи.

Для вивчення малих коливань механічної системи слід встановити, чи стійким є визначене положення рівноваги, чи нестійким. Для наочності розглянемо положення рівноваги стержня  $AB$  (Рис. 29.1) з горизонтальною віссю обертання, що проходить через точку  $A$ .

Стержень має два положення рівноваги при  $\varphi = 0$  і  $\varphi = 180^\circ$ . У положенні рівноваги сили, прикладені до стержня, зрівноважені. Щоб установити, чи буде дане положення рівноваги стійким, потрібно надати системі незначне відхилення від цього положення. Якщо сили намагаються повернути систему в це положення рівноваги, то таке **положення рівноваги вважають стійким** (нижнє положення стержня).

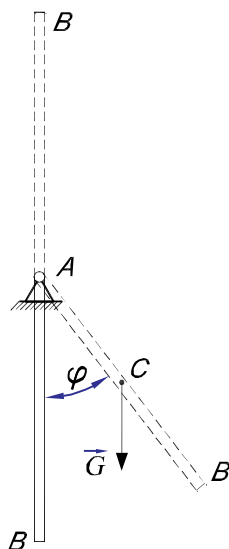


Рисунок 29.1

Означення поняття положення стійкої рівноваги дано в роботах **О.М.Ляпунова**. Якщо узагальнені координати

$q_1, q_2, \dots, q_H$  відрахувати від положення рівноваги та початкові значення узагальнених швидкостей і координат позначити відповідно  $\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dots, \dot{q}_{H0}$  та  $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{H0}$ , то за Ляпуновим, рівновагу механічної системи називають стійкою, якщо для будь-якого як завгодно додатньо малого числа  $\varepsilon$  можна вказати два інші малі додатні числа  $\eta_1$  і  $\eta_2$  такі, що коли початкові збурення системи задовільняють умови  $|q_{i0}(t)| < \eta_1$ ,  $|\dot{q}_{i0}(t)| < \eta_2$ , то надалі під час руху механічної системи задовільняються умови  $|q_i(t)| < \varepsilon$  для всіх узагальнених координат.

Якщо навколо положення стійкої рівноваги всі узагальнені координати та швидкості з часом прямують до нуля

$$q_i(t) \rightarrow 0, \dot{q}_i(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

то таке положення рівноваги називають **асимптотично стійким**. Таким чином, положення рівноваги вважають стійким, якщо можна задати достатньо малу область зміни початкових значень узагальнених координат і узагальнених швидкостей біля положення рівноваги, для яких величини узагальнених координат при подальшому русі системи обмежені заданою величиною  $\varepsilon$ . Оскільки в положенні рівноваги мають місце рівності (29.1), то потенціальна енергія в положенні рівноваги досягає свого екстремального значення.

Для визначення стійкості даного положення рівноваги користуються **теоремами Лагранжа–Дирихле** і Ляпунова, які надамо без доведень. Теорема Лагранжа–Дирихле встановлює достатні умови стійкості положення рівноваги системи: **положення рівноваги механічної системи з голономними ідеальними стаціонарними в'язями буде стійким, якщо в ньому потенціальна енергія системи має мінімум**. Ця теорема може бути доповнена двома **теоремами Ляпунова, що встановлюють умови нестійкості рівноваги**:

1. Рівновага механічної системи нестійка, якщо її потенціальна енергія в положенні рівноваги не має мінімуму та його відсутність визначається складовими другого порядку малості у розкладі потенціальної енергії в ряд за степенями узагальнених координат біля положення рівноваги.

2. Рівновага механічної системи нестійка, якщо потенціальна енергія  $U$  у положенні рівноваги має максимум і його наявність визначається складниками найменшого порядку малості в розкладі потенціальної енергії в ряд за степенями узагальнених координат біля положення рівноваги.

Згідно з теоремами Лагранжа–Дирихле та Ляпунова для встановлення стійкості положення рівноваги консервативної системи необхідно переконатися, які екстремальні значення має потенціальна енергія системи в цьому положенні.

Розглянемо одне із положень рівноваги, в якому виконуються рівності (29.1). Будемо вважати, що в цьому

положенні потенціальна енергія дорівнює нулеві і від цього положення відраховують узагальнені координати

$$P_0 = P(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (29.2)$$

Розкладемо потенціальну енергію біля положення рівноваги в ряд Маклорена за степенями узагальнених координат

$$\begin{aligned} P(q_1, q_2, \dots, q_H) = & P_0 + \left( \frac{\partial P}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \dots + \left( \frac{\partial P}{\partial q_H} \right)_0 q_H + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \dots + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial q_H^2} \right)_0 q_H^2 + \right. \\ & \left. + 2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \dots + 2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial q_{H-1} \partial q_H} \right)_0 q_{H-1} q_H \right] + \dots \end{aligned} \quad (29.3)$$

Індекс 0 тут і далі означає, що ці величини обчислюють при  $q_1 = q_2 = \dots = q_H = 0$ . Ми обмежилися членами другого порядку малості щодо  $q_1, q_2, \dots, q_H$ . Ураховуючи рівності (29.1), (29.2) та приймаючи для коефіцієнтів при членах другого степеня позначення

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 = c_{ij}, \quad (29.4)$$

одержимо такий вираз для потенціальної енергії біля взятого положення рівноваги

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + \dots + c_{HH} q_H^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + \\ & + \dots + 2c_{H-1H} q_{H-1} q_H) + \dots \end{aligned} \quad (29.5)$$

Коефіцієнти  $c_{ij}$  називають **коефіцієнтами жорсткості** механічної системи.

Знак потенціальної енергії визначається знаком квадратичної форми в формулі (29.5), оскільки відкинуті члени

ряду більш високого порядку малості щодо  $q_1, q_2, \dots, q_H$ . Якщо квадратична форма напевно додатня біля даного положення рівноваги, а  $\Pi_0 = 0$ , то в цьому положенні потенціальна енергія має мінімум і воно буде положенням стійкої рівноваги.

Питання про знак квадратичної форми вирішується теоремою Сильвестра: **для того щоб квадратична форма була напевно додатньою, необхідно та достатньо, щоб усі діагональні мінори матриці квадратичної форми були додатніми.** Матриця квадратичної форми (29.5) та її діагональні мінори мають вигляд

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1H} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2H} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{H1} & c_{H2} & \dots & c_{HH} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots \quad (29.6)$$

Таким чином, критерієм того, що квадратична форма є напевно додатньою і що відповідне положення рівноваги системи є стійким, буде

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_H > 0. \quad (29.7)$$

Доведення теореми Сильвестра можна знайти в курсах лінійної алгебри.

## 29.2. Кінетична енергія механічної системи біля положення рівноваги

Обчислимо кінетичну енергію механічної системи з голономними стаціонарними ідеальними в'язями, для якої радіус-вектори точок залежать тільки від узагальнених координат і не залежать явно від часу

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_H). \quad (29.8)$$

Швидкість кожної точки

$$\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_H} \dot{q}_H \quad (29.9)$$

і тоді вираз для кінетичної енергії має вигляд

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_H} \dot{q}_H \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_H} \dot{q}_H \right) m_k \end{aligned} \quad (29.10)$$

або

$$T = \frac{1}{2} [A_{11} \dot{q}_1^2 + \dots + A_{HH} \dot{q}_H^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2A_{H-1H} \dot{q}_{H-1} \dot{q}_H], \quad (29.11)$$

де прийняті позначення для  $A_{ij} = A_{ji}$

$$A_{ij} = A_{ij}(q_1, \dots, q_H) = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad (i, j = 1, \dots, H). \quad (29.12)$$

Якщо біля положення стійкої рівноваги механічної системи коефіцієнти розкласти в ряд Тейлора за степенями узагальнених координат

$$A_{ij}(q_1, \dots, q_H) = (A_{ij})_0 + \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \dots + \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_H} \right)_0 q_H + \dots, \quad (29.13)$$

то, нехтуючи величинами третього порядку малості щодо величин  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  і прийнявши позначення  $(A_{ij})_0 = a_{ij}$ , одержимо вираз для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} [a_{11} \dot{q}_1^2 + \dots + a_{HH} \dot{q}_H^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2a_{H-1H} \dot{q}_{H-1} \dot{q}_H]. \quad (29.14)$$

Коефіцієнти  $a_{ij}$  називають **інерційними коефіцієнтами** механічної системи.



Як видно, кінетична енергія механічної системи виражена квадратичною формою і оскільки вона завжди величина додатня, то ця форма напевно додатня та її коефіцієнти за теоремою Сильвестра задовільняють умови:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, \Delta_H = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1H} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{H1} & \dots & a_{HH} \end{vmatrix} > 0. \quad (29.15)$$

### 29.3. Функція Релея та узагальнені сили опору при малих коливаннях біля положення рівноваги механічної системи

Оскільки функція Релея

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \mu_k v_k^2, \quad (29.16)$$

яку використовують для обчислення узагальнених сил опору

$$Q_{\phi}^i = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (29.17)$$

має вигляд аналогічний до виразу кінетичної енергії (29.10), то вона біля положення рівноваги механічної системи теж набирає аналогічного до (29.14) вигляду

$$\Phi = \frac{1}{2} [b_{11} \dot{q}_1^2 + \dots + b_{HH} \dot{q}_H^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2b_{H-1H} \dot{q}_{H-1} \dot{q}_H], \quad (29.18)$$

де коефіцієнти  $b_{ij}$  обчислюють за такими ж формулами як і  $a_{ij}$ , в яких замість мас  $m_k$  використовують коефіцієнти  $\mu_k$  опору середовища.

#### 29.4. Малі коливання механічної системи з одним ступенем вільності біля положення стійкої рівноваги

Розглянемо рух консервативної механічної системи з одним ступенем вільності біля положення її стійкої рівноваги, в якому узагальнена координата  $q$  дорівнює нулеві. Нехай при  $t = 0$  систему відхилили від положення рівноваги й її точкам надали невеликі початкові швидкості, такі, що в подальшому русі узагальнена координата  $q$  та узагальнена швидкість  $\dot{q}$  будуть малі за модулем унаслідок руху біля положення стійкої рівноваги.

Ці умови дозволяють для дослідження руху системи використовувати наведені вище вирази для потенціальної й кінетичної енергій та функції Релея.

Для системи з одним ступенем вільності маємо з формул (29.4), (29.13) і (29.17) для потенціальної енергії

$$П = \frac{1}{2}cq^2, \quad (29.19)$$

де  $c > 0$ ; для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \quad (29.20)$$

де  $a > 0$ ; для функції Релея

$$\Phi = \frac{1}{2}b\dot{q}^2, \quad (29.21)$$

де  $b > 0$ .

Будемо вважати, що на точки механічної системи крім консервативних сил та сил опору діють збурювальні сили, узагальнена сила яких має періодичний характер

$$Q_B = H \sin(pt + \delta). \quad (29.22)$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду, що матиме такий вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_{\Pi} + Q_{\Phi} + Q_B, \quad (29.23)$$

де  $Q_{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$  – потенціальна узагальнена сила,  $Q_{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$  – узагальнена сила опору,  $Q_B$  – узагальнена збудувальна сила.

$$\text{Тоді} \quad Q_{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq, \quad Q_{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b\dot{q},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}. \quad (29.24)$$

Відповідно до (29.23) отримаємо

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q} + H \sin(pt + \delta), \quad (29.25)$$

$$\text{або} \quad \ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin(pt + \delta), \quad (29.26)$$

$$\text{де} \quad k^2 = \frac{c}{a}, \quad 2n = \frac{b}{a}, \quad h = \frac{H}{a}.$$

Ми одержали диференціальне рівняння, яке цілком аналогічне до диференціального рівняння змушених коливань матеріальної точки в середовищі з опором.

Якщо сили опору відсутні ( $b=0$ ), отримаємо диференціальне рівняння змушених коливань у середовищі без опору

$$\ddot{q} + k^2q = h \sin(pt + \delta), \quad (29.27)$$

Якщо збудувальні сили відсутні ( $H=0$ ), то відповідно матимемо диференціальні рівняння вільних незгасаючих коливань

$$\ddot{q} + k^2q = 0 \quad (29.28)$$

і вільних згасаючих коливань

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0. \quad (29.29)$$

Розв'язки цих диференціальних рівнянь й аналіз відповідних коливань детально розглянуті в главі 16 «Прямолінійні

коливання точки».

### 29.5. Малі коливання механічної системи з двома степенями вільності біля положення стійкої рівноваги

Як уже відомо з теорії коливань однієї матеріальної точки, а отже і системи точок з одним степенем вільності, надзвичайно важливим у практичних розрахунках є обчислення циклічної частоти вільних коливань з метою запобігти появі досить небезпечного явища – резонанса, коли амплітуда коливань механічної системи може досягти якої завгодно величини при наближенні частоти збурювальних сил до частоти вільних коливань системи.

Якщо частоту вільних коливань точки або системи точок з одним степенем вільності обчислюють за формулою

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{або} \quad k = \sqrt{\frac{c}{a}},$$

то для системи з двома та більшим числом степенів вільності таких частот буде відповідно дві або більше й їх обчислення дещо ускладнене.

Щоб показати, як розв'язують цю задачу як основну задачу теорії коливань, ми розглянемо малі коливання механічної системи з двома степенями вільності.

Для системи з двома степенями вільності з формул (29.4), (29.13) маємо біля положення стійкої рівноваги: для потенціальної енергії

$$П = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \quad (29.30)$$

$$\text{де } \Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0;$$

для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} [a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2], \quad (29.31)$$

де  $\Delta_1 = a_{11} > 0$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ .

Складемо рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \quad (29.32)$$

Обчисливши відповідні похідні від виразів (29.30) і (29.31), отримаємо такі лінійні диференціальні рівняння малих вільних коливань механічної системи з двома степенями вільності:

$$\begin{aligned} [a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1] + [a_{12} \ddot{q}_2 + c_{12} q_2] &= 0, \\ [a_{12} \ddot{q}_1 + c_{12} q_1] + [a_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} q_2] &= 0. \end{aligned} \quad (29.33)$$

Механічні системи, для яких квадратичні вирази для кінетичної і потенціальної енергій (29.4) і (29.13) є точними без відкидання членів більш високого порядку, називають лійними. Для цих систем рівняння (29.33) є точними рівняннями. Математична теорія малих коливань не відрізняється від теорії лінійних коливань, але останні можуть бути і не малими.

Розв'язок рівнянь (29.33) шукаємо в формі

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha), \quad (29.34)$$

де сталі величини  $A_1, A_2, k, \alpha$  потрібно визначити.

Підставляємо (29.34) у диференціальні рівняння (29.33) і одержуємо тотожності, в яких сталі коефіцієнти при  $\sin(kt + \alpha)$  повинні дорівнювати нулеві:

$$\begin{cases} A_1(c_{11} - a_{11}k^2) + A_2(c_{12} - a_{12}k^2) = 0, \\ A_1(c_{12} - a_{12}k^2) + A_2(c_{22} - a_{22}k^2) = 0. \end{cases} \quad (29.35)$$

Однорідна система лінійних рівнянь щодо  $A_1$  і  $A_2$  має розв'язок відмінний від нуля, якщо визначник цієї системи дорівнює нулеві:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

або в таких двох формах

$$f(k^2) = (c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0, \quad (29.36)$$

$$f(k^2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})k^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \quad (29.37)$$

Одержане рівняння (29.36) або еквівалентне йому рівняння (29.37) називають рівнянням частот і тільки для значень частот  $k$ , що задовільняють це рівняння, існують відмінні від нуля  $A_1, A_2$  а, отже, і  $q_1, q_2$ .

Покажемо, що обидва корні цього рівняння щодо  $k^2$  дійсні й додатні. Користуючись відношеннями біля формул (29.30) і (29.31), з рівностей (29.36) чи (29.37) відповідно отримаємо:

$$f(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad f(\infty) > 0,$$

$$f\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = \left(\frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{11}}\right)^2 < 0,$$

$$f\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = \left(\frac{a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22}}{a_{22}}\right)^2 < 0.$$

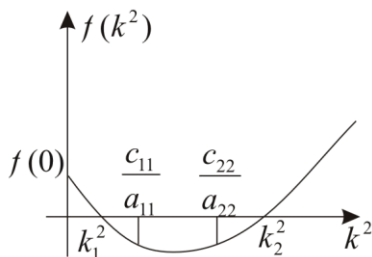


Рисунок 29.2

Це означає, що між  $k^2 = 0$  і  $k^2 = \infty$  графік функції  $f = f(k^2)$

перетинає вісь у двох точках (Рис. 29.2), що визначають два додатніх кореня  $k_1^2$  і  $k_2^2$  рівняння частот.

Кожному додатньому значенню  $k_1^2$  і  $k_2^2$  відповідає один окремий розв'язок (29.34), причому кожній частоті відповідають свої значення й окремі лінійно незалежні розв'язки, а тому загальний розв'язок буде їх лінійною комбінацією:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (29.38)$$

Із рівнянь (29.35)

$$\frac{A_2^{(i)}}{A_1^{(i)}} = \left( \frac{c_{11} - a_{11} k_i^2}{c_{12} - a_{12} k_i^2} \right) = \mu_i, \quad (i = 1, 2), \quad (29.39)$$

а тому вирази (29.38) можна записати так

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= A_1^{(1)} \mu_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \mu_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (29.40)$$

Чотири сталі  $A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(2)}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  визначають з початкових умов. Величини

$$q_1^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad q_2^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) \mu_1$$

називають головними коливаннями для частоти  $k_1$ ,

$$q_1^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad q_2^{(2)} = A_1^{(2)} \mu_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) -$$

головними коливаннями для частоти  $k_2$ .

Вільні лінійні коливання механічної системи з двома степенями вільності складаються з суми двох головних гармонійних коливань з частотами  $k_1$  і  $k_2$ .

Частоти  $k_1^1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$  і  $k_2^1 = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}$  (Рис. 29.2) називають

**парціальними частотами системи.**

Коефіцієнти  $\mu_1$  і  $\mu_2$  називають коефіцієнтами форми коливань.

Частоти коливань  $k_1$  і  $k_2$ , коефіцієнти форми коливань  $\mu_1$  і  $\mu_2$  є головними характеристиками малих коливань системи з двома степенями вільності.

На закінчення відзначимо, що методи складання та інтегрування диференціальних рівнянь малих коливань, а також визначення їх частот для системи з двома степенями вільності біля положення стійкої рівноваги без жодних змін можна перенести на системи з більшим числом степенів вільності.

### **Контрольні запитання**

1. Яке положення рівноваги називають стійким?
2. Сформулюйте теорему Лагранжа–Дирихле, яка встановлює достатні умови стійкості положення рівноваги.
3. Сформулюйте теореми Ляпунова, що встановлюють умови нестійкості рівноваги.
4. Запишіть диференціальні рівняння малих коливань механічних систем з одним та двома степенями вільності.



## Глава 30. Теорія удару

### 30.1. Основні поняття і означення

Ударом називають механічне явище, під час якого за нескінченно малий проміжок часу, тобто майже миттєво, швидкості деяких або всіх точок механічної системи змінюються на кінцеві величини в порівнянні з їх значеннями безпосередньо перед ударом.

Зустрічаються різні за характером випадки ударних явищ. У найпростіших випадках удар має місце при миттєвому накладанні або знятті в'язей, зіткненні двох тіл з різними швидкостями. У більш складних випадках ударні явища мають місце під час ковання, штампування, забивання свай, зіткнення коліс транспорту з нерівностями дороги тощо.

Зміна швидкостей точок під час удару на скінченні величини означає, що точки одержують надзвичайно великі ударні прискорення, оскільки час зміни швидкостей нескінченно малий, і отже, на точки діють надзвичайно великі ударні сили.

Характерний графік зміни ударної сили  $\vec{F}$  за час удару  $\tau$  має вигляд, показаний на рис. 30.1.

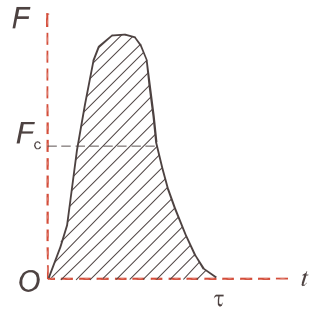


Рисунок 30.1

У багатьох випадках не є необхідним детальне знання закону зміни ударної сили. Достатньо знати імпульс цієї сили за час удару. Ударним імпульсом називають векторну величину

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt, \quad (30.1)$$

модуль якої зображений на рис. 30.1 заштрихованою площею.

За теоремою про середнє значення функції імпульс  $\vec{S}$  можна подати у вигляді

$$\vec{S} = \vec{F}_c \cdot \tau, \quad S = F_c \cdot \tau, \quad (30.2)$$

де  $\vec{F}_c$  називають **середньою ударною силою**, величина якої є сталою за час удару та дає такий самий ударний імпульс, як і змінна ударна сила  $\vec{F}$ .

Середня ударна сила згідно з її означенням має величину порядку  $1/\tau$ , тобто при малому  $\tau$  є дуже великою.

Імпульс сталої за модулем сили  $\vec{F}_k$  за час удару можна за допомогою (30.2) записати так

$$\vec{S} = \vec{F}_k \cdot \tau, \quad S = F_k \tau. \quad (30.3)$$

Цей імпульс має величину порядку  $\tau$  і є величиною малою порівняно з ударним імпульсом. Тому імпульсами неударних сил можна знехтувати в порівнянні з **ударними імпульсами**.

Переміщення  $s$  точок за час удару  $\tau$  можна визначити за формулою

$$s = v_c \tau. \quad (30.4)$$

де  $v_c$  – середня швидкість за час удару будь-якої точки механічної системи. Оскільки  $v_c$  – скінчена величина (константа), а час удару дуже малий, то порядок малості переміщення  $s$  такий самий, як і величини  $v_c \tau$ .

Це твердження впливає з однієї з властивостей нескінчено малих величин. Тому переміщенням точок за час удару можна знехтувати.

Отже, з наведених міркувань впливають такі **підсумки**:

- 1. Дією неударних сил за час удару можна знехтувати.**
- 2. Нехтуючи переміщеннями точок за час удару, механічну систему за цей час можна вважати нерухомою.**

**3. Зміну швидкості будь-якої точки за час удару визначають за теоремою про зміну кількості руху точки**

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S} = \vec{F}_c \tau, \quad (30.5)$$

де  $\vec{u}$  – швидкість точки після удару,  $\vec{v}$  – швидкість точки до удару,  $\vec{S}$  – ударний імпульс. Залежність (30.5) є основним рівнянням теорії удару.

### **30.2. Загальні теореми динаміки при ударі**

Як уже було зазначено, основним рівнянням теорії удару є (30.5), де за теоремою про зміну кількості руху точки при ударі:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}. \quad (30.6)$$

**Отже зміна кількості руху точки за час удару дорівнює ударному імпульсу, прикладеному до точки.**

У проекціях на координатні осі маємо:

$$m u_x - m v_x = S_x, \quad m u_y - m v_y = S_y, \quad m u_z - m v_z = S_z. \quad (30.7)$$

Для будь-якої точки механічної системи розділимо ударні імпульси на зовнішні та внутрішні, тоді:

$$m_k \vec{u}_k - m_k \vec{v}_k = \vec{S}_k^e + \vec{S}_k^i. \quad (30.8)$$

Додаючи такі формули для всіх точок механічної системи, отримуємо

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k - \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i. \quad (30.9)$$

Враховуючи, що  $\sum_{k=1}^n m_k \vec{u}_k = \vec{Q}_u$  – кількість руху механічної системи після удару,  $\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \vec{Q}_v$  – кількість руху механічної

системи до удару,  $\sum_{k=1}^n \vec{S}_k^i = 0$  – як сума всіх внутрішніх імпульсів, отримаємо теорему про зміну кількості руху механічної системи при ударі

$$\vec{Q}_u - \vec{Q}_v = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e, \quad (30.10)$$

тобто: **зміна кількості руху механічної системи за час удару дорівнює геометричній сумі зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи.** З (30.10) бачимо, що внутрішні ударні імпульси не впливають на зміну кількості руху механічної системи.

У проекціях на координатні осі матимемо:

$$\begin{aligned} Q_{ux} - Q_{vx} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \\ Q_{uy} - Q_{vy} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \\ Q_{uz} - Q_{vz} &= \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \end{aligned} \quad (30.11)$$

Якщо рівність (30.6) домножимо векторно на радіус–вектор точки, враховуючи, що він один і той самий до удару і після удару (за час удару точка не переміщається), то отримаємо

$$\vec{r} \times m\vec{u} - \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{S},$$

тобто, отримаємо теорему про зміну кінетичного моменту точки при ударі

$$\vec{m}_O(m\vec{u}) - \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{m}_O(\vec{S}) \quad (30.12)$$

або 
$$\vec{k}_O^u - \vec{k}_O^v = \vec{m}_O(\vec{S}), \quad (30.13)$$

яку можна сформулювати так: **зміна кінетичного моменту точки відносно будь–якого центра за час удару дорівнює моменту ударного імпульса відносно цього центра.**

У випадку механічної системи, на точки якої діють зовнішні та внутрішні ударні імпульси, теорему про зміну кінетичного моменту точки при ударі запишемо так

$$\vec{k}_O^u - \vec{k}_O^v = \vec{m}_O(\vec{S}_i^i) + \vec{m}_O(\vec{S}_i^e) \quad (30.14)$$

і додамо їх для всіх точок системи

$$\sum_{k=1}^n \vec{k}_O^u - \sum_{k=1}^n \vec{k}_O^v = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{S}_k^i) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{S}_k^e).$$

Суми, що стоять зліва у цьому виразі, є кінетичними моментами механічної системи після удару  $\vec{K}_O^u$  та до удару  $\vec{K}_O^v$ , сума моментів внутрішніх ударних імпульсів у правій частині виразу дорівнює нулю. Тоді остаточно запишемо теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи при ударі

$$\vec{K}_O^u - \vec{K}_O^v = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{S}_k^e) \quad (30.15)$$

**тобто: зміна кінетичного моменту механічної системи відносно будь-якого центра  $O$  за час удару дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх ударних імпульсів відносно цього центра.**

З рівності (30.15) видно, що внутрішні ударні імпульси не впливають на зміну кінетичного моменту механічної системи.

### 30.3. Удар точки по нерухомій поверхні

Удар називають прямим, якщо швидкість точки  $\vec{v}$  перед ударом напрямлена по нормалі до поверхні в точці  $M$  удару (Рис. 30.2). Після удару точка відокремиться від поверхні зі швидкістю  $\vec{u}$ , напрямленою теж по нормалі до поверхні.

Процес удару точки до поверхні можна розділити на фазу деформації та фазу відновлення форми тіл. Фазу

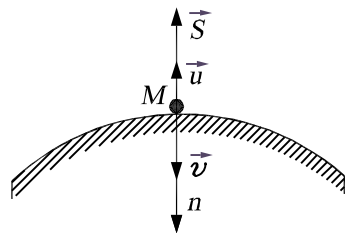


Рисунок 30.2

деформації відраховують по часу від моменту початку удару до моменту найбільшої деформації тіл. У кінці цієї фази швидкість точки дорівнює нулеві. За час фази відновлення матеріальні тіла від моменту часу найбільшої деформації до часу відокремлення тіл відновлюють свою початкову форму при пружному ударі – частково, при абсолютно пружному – повністю. При абсолютно непружному ударі форма тіл не відновлюється зовсім і удар має лише одну фазу деформації тіл.

За час удару на точку діє реактивний ударний імпульс  $\vec{S}$  з боку поверхні, який можна представити як суму двох фазових імпульсів, віднесених до часу деформації тіл і до часу відновлення їх форм

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2. \quad (30.16)$$

Відношення числових значень ударних імпульсів за другу та першу фазу удару називають коефіцієнтом відновлення

$$k = \frac{S_2}{S_1}. \quad (30.17)$$

Оскільки  $S_1 \geq S_2$ , то  $0 \leq k \leq 1$  і при абсолютно пружному ударі  $k = 1$ , а при абсолютно непружному ударі  $k = 0$ .

Застосуємо теорему про зміну кількості руху точки за першу та другу фазу окремо в проекції на нормаль  $\vec{n}$ , урахувавши, що швидкість точки між фазами дорівнює нулеві

$$0 - mv = -S_1, \quad -tu - 0 = -S_2, \quad (30.18)$$

$$\text{звідси} \quad S_1 = mv, \quad S_2 = tu, \quad k = \frac{S_2}{S_1} = \frac{u}{v}. \quad (30.19)$$

Як бачимо, коефіцієнт відновлення при прямому ударі точки дорівнює відношенню числових значень швидкостей точки після удару та до удару.

Якщо виразити повний ударний імпульс залежно від коефіцієнта відновлення, то з формул (30.16) і (30.17) маємо

$$S = S_1 + S_2 = m(v + u) = mv(1 + k), \quad (30.20)$$

звідси при  $k = 1$ ,  $- S = 2mv$ , при  $k = 0$ ,  $- S = mv$ , тобто, ударний імпульс при абсолютно пружному ударі вдвоє більший від ударного імпульсу при абсолютно непружному ударі.

### Експериментальне визначення коефіцієнта відновлення

Коефіцієнт відновлення для матеріалів деяких тіл при їх ударних взаємодіях можна визначати експериментально, виходячи з формули (30.19) (Рис. 30.3), якщо виміряти висоту  $h_2$ , на яку підніметься тіло у вигляді кульки внаслідок прямого удару по нерухомій поверхні після падіння з заданої висоти  $h_1$ .

Швидкість кульки перед ударом при падінні з висоти  $h_1$  дорівнює  $v = \sqrt{2gh_1}$ .

Щоб кулька після удару могла піднятися на висоту  $h_2$ , вона повинна мати швидкість  $u = \sqrt{2gh_2}$ . Тоді для коефіцієнта відновлення маємо

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (30.21)$$

Таким чином, знаючи коефіцієнт відновлення  $k$  для даних матеріалів і швидкість  $v$  точки перед ударом, можна знайти її швидкість  $u$  після прямого удару по нерухомій поверхні та імпульс, що діє на точку за час цього удару

$$u = kv, \quad S = mv(1 + k). \quad (30.22)$$

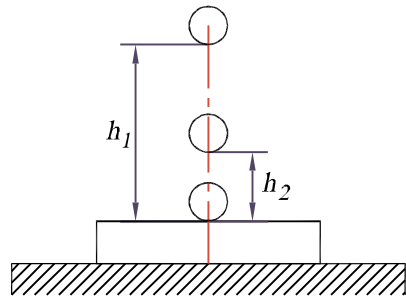


Рисунок 30.3

## Косий удар

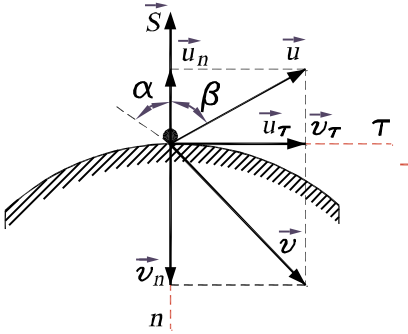


Рисунок 30.4

Удар називають непрямым або косим, якщо вектор швидкості  $\vec{v}$  точки перед ударом утворює кут  $\alpha$  з нормаллю до поверхні.

При  $\alpha = 0$  матимемо прямий удар. Кут  $\alpha$  називають кутом падіння. Вектор швидкості  $\vec{u}$  точки після удару утворює кут  $\beta$  з нормаллю до поверхні, який називають кутом відбиття (Рис. 30.4).

Приймаючи поверхню настільки гладкою, щоб ударне тертя вважати відсутнім, запишемо теорему про зміну ударного імпульсу

$$\vec{S} = m\vec{u} - m\vec{v}, \quad (30.23)$$

що напрямлений по нормалі до поверхні, причому

$$\begin{cases} S = S_n = mu_n - mv_n, \\ S_{1n} = mv_n, \\ S_{2n} = mu_n, \\ S_\tau = 0 = mu_\tau - mv_\tau, \\ u_\tau = v_\tau. \end{cases} \quad (30.24)$$

Коефіцієнт відновлення в цьому випадку

$$k = \frac{S_{2n}}{S_{1n}} = \frac{u_n}{v_n}, \quad (30.25)$$

тобто дорівнює відношенню величин нормальної складової швидкості точки після удару та до удару.

Якщо для даних двох матеріалів коефіцієнт відновлення



відомий, то, знаючи кут падіння  $\alpha$  і швидкість точки до удару  $\vec{v}$ , для швидкості точки після удару  $\vec{u}$ , імпульса  $\vec{S}$  і кута відбиття  $\beta$ , отримаємо такі вирази:

$$u_n = kv_n, \quad u_\tau = v_\tau, \quad S = m(1+k)v_n, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{k}\operatorname{tg}\alpha. \quad (30.26)$$

Як і у випадку прямого удару для ударного імпульсу при  $k = 0$  і  $k = 1$  відповідно маємо:

$$S = mv_n \quad \text{і} \quad S = 2mv_n, \quad (30.27)$$

тобто імпульс при абсолютно пружному ударі вдвоє більший від імпульсу при абсолютно непружному ударі.

### 30.4. Прямий центральний удар двох тіл

Удар двох тіл називають **прямим центральним**, якщо спільна нормаль поверхонь тіл у точці удару проходить через їх центри мас і швидкості центрів мас до удару напрямлені по цій спільній нормалі.

Прикладом такого удару є удар двох однорідних куль, центри яких до удару рухаються по одній і тій самій прямій (Рис. 30.5)

Нехай маси тіл дорівнюють  $m_1$  і  $m_2$  та їх швидкість до удару  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$ , а після удару відповідно  $\vec{u}_1$  та  $\vec{u}_2$ .

Задача полягає в тому, щоб за відомими масами тіл, їх швидкостями до удару та коефіцієнтом відновлення  $k$  обчислити швидкості тіл після удару.

Застосуємо для кожного тіла в обох фазах удару теорему про зміну кількості руху в проекції на вісь  $C_1x$ , напрямлену по лінії

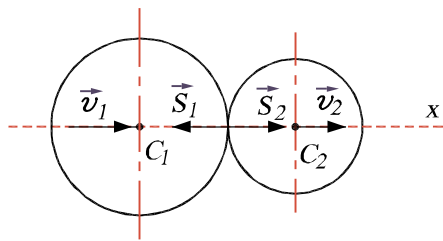


Рисунок 30.5

удару (Рис. 30.5)

$$\begin{aligned} m_1 u - m_1 v_1 &= -S_1', & m_1 u_1 - m_1 u &= -S_1'', \\ m_2 u_2 - m_2 v_2 &= -S_2', & m_2 u_2 - m_1 u_1 &= -S_2'', \end{aligned} \quad (30.28)$$

де  $u$  – спільна швидкість тіл у кінці першої фази удару,  $S_1' = -S_2'$ ,  $S_1'' = -S_2''$  – за принципом рівності дії та протидії.

Ураховуючи залежність (30.17), для коефіцієнта відновлення отримаємо

$$k = \frac{S_1''}{S_1'} = \frac{S_2''}{S_2'}, \quad (30.29)$$

і враховуючи (30.28), а також рівності:

$$S_1' = -S_2', \quad S_1'' = -S_2'' \quad \text{і} \quad S_1' + S_2'' = S_2' + S_2'', \quad (30.30)$$

маємо:

$$\begin{aligned} u &= \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \\ u &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2. \end{aligned} \quad (30.31)$$

Тоді для коефіцієнта відновлення одержимо вираз

$$k = \frac{S_1''}{S_1'} = \frac{m_1 u - m_1 u_1}{m_1 v_1 - m_1 u},$$

з якого при підстановці замість  $u$  його виразу (30.31) в знаменник за першою формулою, а в чисельник за другою, остаточно дістанемо

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \quad (30.32)$$

З цього виразу для  $k$  видно, що в чисельнику та в знаменнику маємо відповідно відносні швидкості куль після удару та до удару, а тому цей коефіцієнт можна назвати коефіцієнтом відновлення відносних швидкостей куль.

Якщо  $k$  відоме, то з третьої формули (30.31) і (30.32) знайдемо  $u_1$  і  $u_2$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1(m_1 - m_2k) + m_2v_2(1+k)}{m_1 + m_2}, \\ u_2 &= \frac{v_2(m_2 - m_1k) + m_1v_1(1+k)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (30.33)$$

Ударні імпульси можна обчислити за формулами (30.28), враховуючи (30.33).

Розглянемо два випадки:

а) Абсолютно непружний удар ( $k = 0$ ). У цьому випадку знаходимо

$$u_1 = u_2 = u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (30.34)$$

Обидві кулі рухаються з однаковою швидкістю.

Ударний імпульс  $S$  дорівнює

$$S = S_1' + S_1'' = S_2' + S_2'' = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (30.35)$$

б) Абсолютно пружний удар ( $k = 1$ ). У цьому випадку

$$u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2),$$

$$u_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \quad (30.36)$$

а для імпульсу  $S$  матимемо:

$$S = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \quad (30.37)$$

Як видно з формул (30.35) і (30.37), при абсолютно пружному ударі ударний імпульс удвоє більший, ніж при абсолютно непружному ударі. В окремому випадку, коли  $m_1 = m_2$  з (30.36) одержимо

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

тобто дві кулі однакової маси при абсолютно пружному ударі обмінюються швидкостями.

### 30.5. Втрата кінетичної енергії при непружному ударі двох тіл.

#### Теорема Карно

Обчислимо величину втраченої кінетичної енергії за час абсолютно непружного удару двох куль

$$T_v - T_u,$$

де  $T_v = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)$  – кінетична енергія куль до удару;

$T_u = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$  – кінетична енергія куль після удару.

З урахуванням рівності (30.34)  $T_u$  можна записати так

$$T_u = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}(m_1v_1 + m_2v_2)u. \quad (30.38)$$

Величина втраченої кінетичної енергії

$$T_v - T_u = T_v - 2T_u + T_u = \\ = \frac{1}{2} \left[ (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - 2m_1 v_1 u - 2m_2 v_2 u + (m_1 u^2 + m_2 u^2) \right]$$

або

$$T_v - T_u = T_v - 2T_u + T_u = \frac{1}{2} \left[ m_1 (v_1 - u)^2 + m_2 (v_2 - u)^2 \right]. \quad (30.39)$$

Різниці  $(v_1 - u)$ ,  $(v_2 - u)$  можна назвати **втраченими швидкостями** куль при ударі, а праву частину рівності (30.39) – кінетичною енергією втрачених швидкостей  $T_{(u-v)}$ , а тому рівність (30.39) відображає теорему Карно при абсолютно непружному ударі: **втрачена кінетична енергія при абсолютно непружному ударі двох куль дорівнює кінетичній енергії втрачених швидкостей куль**, тобто

$$T_v - T_u = T_{(u-v)} \quad (30.40)$$

### 30.6. Удар по тілу в обертальному русі

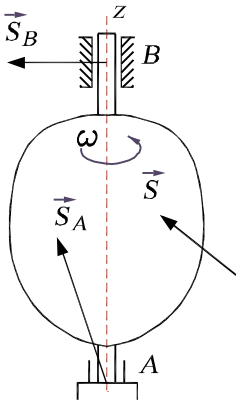


Рисунок 30.6

Розглянемо тіло, що обертається навколо осі  $Az$  з кутовою швидкістю  $\omega_0$  (Рис. 30.6). Нехай у деякий момент часу  $t = 0$  на тіло подіяв ударний імпульс  $\vec{S}$ . Тоді рівняння (30.15) в проекції на вісь обертання набуде вигляду

$$K_z^u - K_z^v = m_z(\vec{S}), \quad (30.41)$$

бо моменти реактивних імпульсів  $\vec{S}_A$  і  $\vec{S}_B$  відносно осі  $z$ , що виникають у підшипниках, дорівнюють нулеві.

Оскільки

$$K_z^v = I_z \omega_0, \quad K_z^u = I_z \omega,$$

де  $\omega$  –кутова швидкість тіла після удару, то з (30.41) маємо:

$$I_z (\omega - \omega_0) = m_z (\vec{S})$$

або

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{I_z} m_z (\vec{S}). \quad (30.42)$$

Формула (30.42) визначає зміну кутової швидкості тіла відносно осі обертання.

**Кутова швидкість тіла за час удару змінюється на величину, що дорівнює відношенню моменту ударного імпульсу до моменту інерції тіла відносно осі обертання.**

### Контрольні запитання

1. Що називають ударом?
2. Сформулюйте основне допущення теорії удару.
3. Як визначають зміну швидкості будь-якої точки за час удару?
4. Сформулюйте загальні теореми динаміки при ударі.
5. Опишіть процес удару точки по поверхні.
6. Що таке коефіцієнт відновлення та як його визначити експериментально?
7. Дайте визначення прямого та непрямого ударів.
8. Сформулюйте теорему Карно.
9. Як змінюється кутова швидкість тіла, яке обертається, за час удару?
10. Чому в теорії удару не враховують теорему про зміну кінетичної енергії?

## ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. Підручник. Видавництво «Техніка», Київ.-2002.-512 с.
2. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. -Посібник. – К.: Вища шк.: Веселка, 1999. – 351 с.:іл.
3. Штанько П.К., Шевченко В.Г., Дзюба Л.Ф., Пасіка В.Р., Поляков О.М. Теоретична механіка. Навчальний посібник (За ред.. Штанько П.К.) – Запоріжжя: ЗНТУ. 2013.-376 с.
4. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: В 2-х Т.: Учеб. пособие для студ. вузов /Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. – 736с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. [В 2-х ч. Для гос. ун-тов]. Перераб. и с доп. С.М. Тарга. Ч. 1–2. – М., «Наука», 1972. – 467с.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики [текст]: учеб. /С.М. Тарг; 13-е изд. Стереотип. – М. Высш. шк., 2001. – 416 с.
7. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие для вузов. /Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 38-е изд. Стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
8. Яблонский А.А., ред. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд. испр. – М.: Интеграл–Пресс, 2002. – 384 с.
9. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: [Учеб. пособие для вузов] /М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, 1990. – Том 1: Статика и кинематика. – 1990. – 670 с.- Том 2: Динамика. – 1966. – 664 с.

10. Крылов А.Н., Крутков Ю.А. Общая теория гироскопов. М., 1932

11. Смерека І.П., Барвінський А.Ф., Білоус Б.Д., Кузьо І.В., Зінько Я.А. Короткий довідник з теоретичної механіки: Навчальний посібник - Львів: «Інтелект-Захід» 2001.-240 с.

12. ДСТУ 3008–95. Документація. Звіти



## Предметний вказівник

- Абсолютно тверде тіло 14  
Аксіоми статички 16-19  
Аксіома про дві сили 16  
– – приєднання зрівноважених сил 16  
– – паралелограм сил 17  
– – рівність дії та протидії 18  
– – затвердіння 18  
Аксіома про в'язі 19  
Аксойд рухомий 219  
– нерухомий 219  
Амплітуда коливань 246  
Афелій 311
- Бінормаль 144
- Варіація координати точки 391  
Варіація радіуса-вектора 391  
Варіньона теорема 41  
Вектор головний 64, 77  
– – його модуль і напрям 67, 78  
– – його проєкції на осі 67, 78  
– ковзаючий 17  
– одиничний 31, 39, 43  
Вектор кутової швидкості і кутового прискорення тіла 157, 158  
Вага тіла 122  
Внутрішні сили 16  
Вертикальне падіння тіла 267  
Відносний рух тіла поблизу поверхні Землі 266  
Відносний стан спокою на поверхні Землі 264  
Вілліса спосіб, формула 203, 206

Вплив обертання Землі на рівновагу та рух тіл 264

Гвинт динамічний 75

Годограф радіуса-вектора 131

Гармонійні коливання 246

Геоцентрична широта 265

Гіроскоп 378

Гіроскопічний момент 385

Гюйгенса теорема 275

Головний вектор і головний момент сил інерції  
твердого тіла 372, 373

Голономні в'язі 390

Д'Аламбера принцип 366-372

Декремент коливань 251

Динаміка 231

Диференціальна передача 204

Диференціальні рівняння малих вимушених коливань механічної  
системи з одним і двома степенями вільності 428, 430

— — вільних коливань точки за відсутністю опору 245

— — — — — з опором 249

— — обертального руху тіла 356

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у векторній  
формі:

— — — — — по прямій лінії 236

— — відносного руху точки 261

— — плоского руху твердого тіла 364

— — поступального руху твердого тіла 354

— — руху системи точок 271

— — — точки в натуральній системі координат  
(форма Ейлера) 237

Додавання обертань твердого тіла навколо осей що

перетинаються 206-208  
– – – – – паралельних осей 198  
Друга задача динаміки точки 234

Еквівалентні системи сил 15  
Еквівалентність пар сил 55  
Елементарна робота сили 318  
Елементарний імпульс сили 287

Загальне рівняння динаміки 406  
Закон Бера 267  
Закон руху точки у векторній формі 131  
– – – у координатній формі 131  
– – – у натуральній формі 132-133  
Закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі 154  
– плоского руху твердого тіла 176  
– поступального руху твердого тіла 153  
– руху вільного твердого тіла 222-223  
– сферичного руху тіла 212  
Закони Ньютона 232-234  
Закон руху точки відносно Землі 266  
Закон збереження кількості руху 293  
– – кінетичного моменту 313  
– – механічної енергії 350  
– – руху центра мас 281  
Збіжна система сил 28  
Зв'язок між векторним, координатним і натуральним способами  
завдання руху точки 133-134  
Зовнішні сили 16  
Зрівноважена система сил 15  
  
Ідеальні в'язі 19, 393

Імпульс сили 287  
Інерційна система відліку 232  
Інваріанти системи сил 71

Кількість руху матеріальної точки 284  
– – механічної системи 285  
– ступенів вільності 398  
Кінематика 130  
Кінематичні рівняння Ейлера 214  
Кінетична енергія матеріальної точки 330  
– – механічної системи 330  
Кінетична енергія твердого тіла в обертальному русі 332  
– – – – у плоскому русі 333  
– – – – у поступальному русі 331  
– – – – у сферичному русі 334  
Кінетична енергія вільного твердого тіла 336  
Кінетичний момент механічної системи відносно осі 306  
– – – – відносно точки 305  
– – тіла відносно осі обертання 307  
Кінетичний потенціал (функція Лагранжа) 415  
Коефіцієнт перевантаження 368  
Коефіцієнт тертя вертіння 105  
– – ковзання 92  
– – кочення 100  
Конус і кут тертя 94,95  
Координати центра ваги лінії 124,125  
– – – об'єму 123  
– – – площі 123  
– – – тіла 122  
– центра мас 272  
– – паралельних сил 120,121  
Коріолісова сила інерції 261

Коріолісове прискорення 168-170  
Косий удар 440  
Кути Ейлера 210-212

Лінія дії сили 15

Маса 231

Маса системи 272

Математичний маятник 359

Матеріальна точка 14

Метод вирізання вузлів 113

– кінетостатики для системи 369

Метод Ріттера 117

Миттєва вісь обертання 218-219

Миттєвий центр прискорень 188

Миттєвий центр швидкостей 180

Механіка 11

Механічна система 269

Механічний рух 11

Можливі переміщення точки та системи 391, 392

Момент інерції системи відносно осі та центра 273

Момент інерції відносно паралельних осей  
(теорема Гюйтенса-Штейнера) 275

Моменти інерції деяких однорідних тіл 276-278

Момент кількості руху матеріальної точки  
відносно осі і центра 305

Момент пари сил 54

Момент рівнодійної сили (теорема Варіньона) 41

Момент сили відносно осі 45

– – – центра 39

– – – координатних осей 47-49

Натуральна система координат 142-144

Невагомість 367  
Неголономні в'язі 390  
Нестационарні в'язі 390  
Неутримуючі в'язі 389  
Нормальна сила інерції 265  
Нормальне прискорення точки 146

Обертальний рух твердого тіла навколо  
нерухомої осі 154-155  
Обчислення узагальнених сил 401-402  
Основна теорема статички 64  
Основне припущення елементарної теорії гіроскопа 380

Пара обертань 201  
Пара сил 53  
Паралельний перенос сили (лема Пуансо) 63  
Передавальне відношення 162  
Переносна сила інерції 261  
- швидкість 168  
Переносне прискорення 168  
Переносний рух 166  
План швидкостей 184-185  
Планетарна передача 204  
Плече пари сил 53  
Плече сили відносно точки 40  
Плоский рух твердого тіла 175  
Поступальний рух твердого тіла 152  
Потенціальна енергія матеріальної точки 349  
Потенціальні сили 323, 325, 329  
Потужність 321  
Похідна за часом від одиничного  
вектора (формули Пуассона) 167, 169

Правило Жуковського для знаходження напрямку прискорення Коріоліса 171  
Принцип відносності класичної механіки (принцип Галілея-Ньютона) 262  
Принцип можливих переміщень (принцип Лагранжа) 394  
Прискорення точки вільного твердого тіла 225-226  
– – при векторному способі завдання її руху 144  
– – при натуральному способі завдання її руху 145-146  
– – при координатному способі завдання руху 145  
– – тіла в обертальному русі 158-160  
– – – у плоскому русі 186-188  
– – – у сферичному русі 225-226  
Проекція сили на вісь і площину 30-31  
Прямий центральний удар двох тіл 441

Радіус інерції 274  
Радіус кривизни 143  
Реактивний момент 25  
Реактивна сила 301  
Реакція в'язі 19  
Резонанс 255  
Рівнодійна двох паралельних сил 51-52  
Рівнодійна системи збіжних сил 28-29  
Рівнозмінний і рівномірний рух точки 148-149  
– – – обертальний рух тіла 156-157  
Рівняння в'язі 389  
Рівняння Лагранжа другого роду 414  
– – – – для потенційних сил 415  
– Мещерського 300  
– миттєвої осі обертання 216-218  
– моментів для плоскої системи збіжних сил 44

Робота сил інерції на можливих переміщеннях  
(поступальний, обертальний і плоский рух) 407-409  
Робота сили 319  
Робота сили ваги 322  
– – тертя ковзання 325  
– – тяжіння 328  
– пружної сили 323  
– сили, прикладеної до тіла, що обертається 325  
Робота моменту сили тертя кочення 327  
Розподілені навантаження 85-87  
Розрахунок плоских ферм (основні поняття,  
допущення) 111-112  
Рух точки (тіла) змінної маси 300  
Рух точки під дією центральної сили. Закон площ 310  
Рядові передачі 163

Середнє прискорення точки 144  
Середня ударна сила 434  
Середня швидкість точки 140  
Сила 15  
Сила ваги 265  
Сила інерції 366  
– – у випадку поступального, плоского і  
обертального рухів тіла 373-375  
Силова лінія 348  
Силова функція 345  
Силове поле 344  
Силовий багатокутник 29  
Стійкість рівноваги за Ляпуновим 421  
Стійкість положення рівноваги системи  
(теорема Лагранжа-Дирихле) 421  
Статично визначувані і статично невизначувані задачі 34  
Статика 14



Ступінь вільності, число ступенів вільності 392  
Сферичний рух твердого тіла 210-211

Теорема Карно (втрата кінетичної енергії при  
непружному ударі двох тіл) 444-445  
Теорема про зміну кількості руху точки і  
системи при ударі 435-436  
Теорема про зміну кінетичного моменту точки  
і системи при ударі 436-437  
Теорема про зміну кількості руху точки і системи 288-292  
Теорема про зміну кінетичного моменту точки  
і системи 308-312  
– – кінетичної енергії точки і системи 337, 340  
– – рух центра мас 280  
– – три непаралельні сили 32  
Теоретична механіка 11  
Тертя вертіння 104  
– – ковзання (тертя першого роду) 91  
– – кочення (тертя другого роду) 99  
Типи в'язей 19-25  
Тіло змінної маси 299  
Точка змінної маси 299  
Точки Ріттера 117  
Траєкторія руху точки 131

Удар 433  
Ударний імпульс, ударна сила 434  
Узагальнена сила 400  
Узагальнені координати 397  
Умова жорсткості ферми 112  
Умови рівноваги системи в узагальнених силах 403  
Умови рівноваги системи тіл 87

- – системи збіжних сил 32-34, 44
- – довільної просторової системи сил 65-66, 68
- – – плоскої системи сил 80-82
- – системи паралельних сил (плоскої і просторової) 85, 70
- – – пар сил (просторові і плоскої) 60-61
- Утримуючі в'язі 389

Фізичний маятник 357

Формула Ейлера 160

– Ціолковського 302

– – для багатоступінчастої ракети 303

Час 12

Частота вільних коливань 246

Число Ціолковського 302

Швидкість точки 139-142

Швидкість точки при векторному, координатному і натуральному способах завдання руху 140-141

– – тіла в обертальному русі 158-159

– – у плоскому русі 178-180

– – у сферичному русі 216-219

**Для нотаток**

**Для нотаток**

**Для нотаток**

**Для нотаток**

ЗАТВЕРДЖУЮ

Голова Вченої ради,

в.о. ректора НУ «Запорізька політехніка»

С.Б. Беліков

2021 р.



ВИТЯГ З ПРОТОКОЛУ № 6/21

засідання вченої ради НУ «Запорізька політехніка»

від 28 січня 2021 р.

**Слухали:** Про рекомендацію до видання навчального посібника «Теоретична механіка» авторів Штанько П.К., Шевченко В.Г., Омельченко О.С., Дзюба Л.Ф., Пасіка В.Р., Поляков О.М.

**Ухвалили:** Рекомендувати до видання навчальний посібник «Теоретична механіка» авторів Штанько П.К., Шевченко В.Г., Омельченко О.С., Дзюба Л.Ф., Пасіка В.Р., Поляков О.М.

Учений секретар

В.В. Кузьмін

## НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ШТАНЬКО	Петро Костянтинович
ШЕВЧЕНКО	Володимир Григорович
ОМЕЛЬЧЕНКО	Ольга Станіславівна
ДЗЮБА	Лідія Федорівна
ПАСІКА	В'ячеслав Романович
ПОЛЯКОВ	Олександр Михайлович

## ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник  
За редакцією П. К Штанька



Видавець:  
**ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»**  
*Адреса редакції:* Україна, 69057, м. Запоріжжя,  
Соборний просп., буд. 158, оф. 249.  
моб. +38 (068) 448-11-28, mail@status.zp.ua  
<http://status.zp.ua>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,  
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції  
*серія ДК № 5316 від 03.04.2017*

Здано в набір 28•І•2021. Підписано до друку 17•ІІ•2021. Формат 60x84 1/16.  
Папір офсетний № 1. Гарнітура Таймз. Друк цифровий. Ум. друк. арк. 26,97.  
Обл.-вид. арк. 9,14. Друк. арк. відбиток 8091. Наклад 300 прим.  
Замовлення № 9528/01.2020-А. Ціна договірна.  
Термін придатності книжки *необмежений*.

Макет розроблений та віддрукований:  
ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»

**ISBN 978-617-7759-77-4**